Höhere Mathematik II, SS2014
M. Hortmann

Blatt 9

bitte heften Sie dieses Blatt vor Ihre Lösungen

Namen						**Gruppennr.**	**Tutor**
1a	b	c	2a	b	3	**Summe**	**bearbeitet**
1	2	1	1	1	1	5 Punkte=100%	

Aufgabe 1

Man betrachte die durch $z \mapsto z^2$ gegebene Abbildung $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Wenn man diese als Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ auffaßt, ergeben sich Komponentenfunktionen $\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$. Man berechne f_1 , f_2 und die Gradientenvektorfelder $\nabla f_1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} \\ \frac{\partial f_1}{\partial y} \end{pmatrix}$, $\nabla f_2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}$ und zeige,

a) daß sie in jedem Punkt des $\mathbb{R}^2$ aufeinander senkrecht stehen.
b) Man berechne die Stromlinien beider Vektorfelder durch einen beliebigen Punkt $(x_{0,} y_0) \in \mathbb{R}^2$ mit Hilfe jeweils einer Fundamentallösung für die zugehörigen linearen Systeme.
c) Man fertige einen Plot der Vektorfelder und der Stromlinien.

Aufgabe 2
a) Berechnen Sie, ggf. mit Hilfe eines geeigneten Computeralgebraprogramms, dessen Input und Output genau zu dokumentieren sind, die Eigenwerte der folgenden reellen 4x4-Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} -12 & -3 & 3 & 10 \\ -3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -21 & -5 & 5 & 17 \end{pmatrix} .$$

b) Einer dieser Eigenwerte ist eine doppelte Nullstelle des charakteristischen Polynoms. Gibt es zu ihm zwei linear unabhängige Eigenvektoren?

Aufgabe 3
Das Newtonsche Gravitationsgesetz lautet:
Die Anziehungskraft zwischen zwei Körpern ist proportional zu ihren Massen und zum Kehrwert des Quadrats ihres Abstands, gerichtet entlang der Verbindungsstrecke zwischen beiden, also

$$K = G m_1 m_2 \frac{(x_1-x_2)/\|x_1-x_2\|}{\|x_1-x_2\|^2} = G m_1 m_2 \frac{x_1-x_2}{\|x_1-x_2\|^3} \quad \text{(Hier sind } x_1, x_2 \in \mathbb{R}^3\text{)}$$

Damit hat man für die Beschleunigungen der beiden Körper zu jedem Zeitpunkt:
$x_1''(t) = G m_2 (x_2-x_1)/\|x_1-x_2\|^3$ und $x_2''(t) = G m_1 (x_1-x_2)/\|x_1-x_2\|^3$

Beschaffen Sie sich nun die Werte für die Gravitationskonstante *G*, sowie für die Sonnenmasse m_1, für die Jupitermasse m_2 und die Erdmasse m_3.

Man berechne die resultierenden Bewegungen der Einfachheit halber im $\mathbb{R}^2$ statt im $\mathbb{R}^3$ an, gemäß obiger Formeln ausgehend vom Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned}
x_1' &= x_3\\
x_2' &= x_4\\
x_3' &= G\left(m_2(x_5-x_1)/\left(\sqrt{(x_5-x_1)^2+(x_6-x_2)^2}\right)^3 + m_3(x_9-x_1)/\left(\sqrt{(x_9-x_1)^2+(x_{10}-x_2)^2}\right)^3\right)\\
x_4' &= G\left(m_2(x_6-x_2)/\left(\sqrt{(x_5-x_1)^2+(x_6-x_2)^2}\right)^3 + m_3(x_{10}-x_2)/\left(\sqrt{(x_9-x_1)^2+(x_{10}-x_2)^2}\right)^3\right)\\
x_5' &= x_7\\
x_6' &= x_8\\
x_7' &= G\left(m_1(x_1-x_5)/\left(\sqrt{(x_5-x_1)^2+(x_6-x_2)^2}\right)^3 + m_3(x_9-x_5)/\left(\sqrt{(x_9-x_5)^2+(x_{10}-x_6)^2}\right)^3\right)\\
x_8' &= G\left(m_1(x_2-x_6)/\left(\sqrt{(x_5-x_1)^2+(x_6-x_2)^2}\right)^3 + m_3(x_{10}-x_6)/\left(\sqrt{(x_9-x_5)^2+(x_{10}-x_6)^2}\right)^3\right)\\
x_9' &= x_{11}\\
x_{10}' &= x_{12}\\
x_{11}' &= G\left(m_1(x_1-x_9)/\left(\sqrt{(x_9-x_1)^2+(x_{10}-x_2)^2}\right)^3 + m_2(x_5-x_9)/\left(\sqrt{(x_9-x_5)^2+(x_{10}-x_6)^2}\right)^3\right)\\
x_{12}' &= G\left(m_1(x_2-x_{10})/\left(\sqrt{(x_9-x_1)^2+(x_{10}-x_2)^2}\right)^3 + m_2(x_6-x_{10})/\left(\sqrt{(x_9-x_5)^2+(x_{10}-x_6)^2}\right)^3\right)
\end{aligned}$$

Man wähle die folgenden Anfangswerte:
$x_1=0,\ x_2=0,\ x_3=0, x_4=0,$
$x_5=$ mittlerer Abstand Jupiter-Sonne, $x_6=0,\ x_7=0$,
$x_8=$ mittlere Umlaufgeschwindigkeit des Jupiter um die Sonne
$x_9=$ mittlerer Abstand Erde-Sonne, $x_{10}=0, x_{11}=0$,
$x_{12}=$ mittlere Umlaufgeschwindigkeit der Erde um die Sonne .

Beschaffen Sie sich nun die fehlenden Abstände, Umlaufgeschwindigkeiten und Umlaufzeiten, lösen Sie das Differentialgleichungssystem mit dem Eulerverfahren, wobei Sie als Schrittweite $\epsilon=1$ Tag wählen und plotten Sie die Bewegung von Sonne $(x_1(t), x_2(t))$, Jupiter $(x_5(t), x_6(t))$ und Erde $(x_9(t), x_{10}(t))$ während eines Jupiter-Jahres.

Bedenken Sie, daß Sie letztlich eine nur Punktefolge im $\mathbb{R}^{12}$ konstruieren, wobei Sie ausgewählte Koordinatenpaare, welche die Positionen der obigen Himmelskörper im $\mathbb{R}^2$ darstellen, jeweils durch Streckenzüge verbinden. Der einzige Grafik-Befehl, der angewandt wird ist also: "zeichne die Verbindungsstrecke zwischen zwei Punkten im $\mathbb{R}^2$, die durch ihre Koordinaten gegeben sind".