Höhere Mathematik II, SS2014
M. Hortmann

Blatt 8

bitte heften Sie dieses Blatt vor Ihre Lösungen

Namen							**Gruppennr.**	**Tutor**
1a	b	c	2a	b	c	3	**Summe**	**bearbeitet**
1	1	1	1	1	1	1	5 Punkte=100%	ses

Integraltransformation und Polarkoordinaten

Hier noch einmal die Integraltransformationsformel mit präzise formulierten Voraussetzungen:

Sei $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\Phi: U \rightarrow V$ stetig differenzierbar, (d.h. alle partiellen Ableitungen $\partial \Phi_i / \partial u_j$ seien auch noch stetig. Es sei $K \subset U$ eine beschränkte abgeschlossene Menge und $\Phi(K) =: L$[1].
Φ sei (zumindest nach Herausnahme einer Nullmenge) injektiv auf *K,* und schließlich sei $f: L \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann folgt

$$\int_L f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n = \int_K f(\Phi(u_1, \ldots, u_n)) |D\Phi(u)|\, du_1 \ldots du_n$$ [2]

Besonders wichtige Anwendungsfälle dieser Formel treten auf, wenn Φ die Polarkoordinaten-Transformation ist:

a) zweidimensional: $U, V = \mathbb{R}^2$, $(r, \varphi) \overset{\Phi}{\mapsto} (r \cos\varphi, r \sin\varphi)$; $K := [0, R] \times [0, 2\pi]$, $L = K_R$ Kreis mit dem Radius *R* um den Nullpunkt. Dabei wird ein Rechteck auf einen Kreis abgebildet. Integrale über einen Kreis können also zu Integralen über ein Rechteck transformiert werden.

b) dreidimensional $U, V = \mathbb{R}^3$, $(r, \varphi, \theta) \overset{\Phi}{\mapsto} (r \cos\varphi \cos\theta, r \sin\varphi \cos\theta, r \sin\theta)$, $K := [0, R] \times [0, 2\pi] \times [-\pi/2, \pi/2]$, $L := K_R$ Kugel mit dem Radius R um den Nullpunkt. Dabei wird ein Quader auf eine Kugel abgebildet. Integrale über eine Kugel können also zu Integralen über einen Quader transformiert werden.

1 Aus der Stetigkeit von φ folgt, daß damit L ebenfalls beschränkt und abgeschlossen ist.
2 Dabei ist $|D\varphi(u)|$ der Betrag der „Funktionaldeterminante von φ", d.h. der Betrag der Determinante der Ableitungsmatrix.

Aufgabe 1

a) Sei L der Kreisring im $\mathbb{R}^2$,der von den Kreisen mit Radius 2 und Radius 3 um den Nullpunkt begrenzt wird und sei $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $(x, y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2}$ (also die Normfunktion).

Man berechne mit Hilfe der Polarkoordinatentransformation das Integral $\int_L f(x, y)\,dxdy$.

b) Seien $a>b>0$. Durch die Gleichung $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ist eine Ellipse im $\mathbb{R}^2$ gegeben. Finden Sie eine Transformation $\Phi:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die ein geeignetes Rechteck auf die Ellipse abbildet, und berechnen Sie dann mit der Integraltransformationsformel den Flächeninhalt der Ellipse.

c) Sei $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ eine Matrix mit positiver Determinante, mit $A^t A=E$; sei $b:=\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ ein fester Punkt des $\mathbb{R}^2$ und $\Phi=Az+b$. Die Abbildung Φ entspricht also einer Rotation und einer Verschiebung. Der Flächeninhalt einer Figur L sollte sich bei einer solchen Transformation nicht ändern. Weisen Sie dies nach, indem Sie mit Hilfe der Integraltransformationsformel zeigen, daß mit $\Phi(K)=L$ in diesem Fall gilt[3]:

$$\int_K du\,dv=\int_L dx\,dy$$

Aufgabe 2

a) Sei K die Figur im $\mathbb{R}^3$, welche durch die Ebene $x+y+z=7$ und die drei durch $x=0$, $y=0$ und $z=0$ gegebenen Ebenen begrenzt wird. Machen Sie sich eine geometrische Vorstellung und berechnen dann das Integral $\int_K (x^2+y^2+z)\,dx\,dy\,dz$ [4].

b) Man betrachte den Durchschnitt der Einheitskugel im $\mathbb{R}^3$ mit dem Innern des Kegels $C:=\{(x, y, z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2\le z^2, 0\le z\}$ und berechne mit Hilfe der dreidimensionalen Polarkoordinatentransformation dessen Volumen.

c) Formulieren und beweisen Sie das dreidimensionale Analogon zu 1c)

Aufgabe 3 Nachtrag zur Substitutionsregel.

Ein wirklich schöner Trick: http://de.wikipedia.org/wiki/Weierstraß-Substitution .
Versuchen Sie genau zu verstehen, wie das funktioniert, und rechnen Sie ein nicht-triviales Beispiel, welches nicht bei Wikipedia steht.

---

3 Hinweis: Das ist als Analysisaufgabe trivial; übrig bleibt eine Ihnen bekannte Aussage aus der linearen Algebra.
4 Es handelt sich um ein einfaches Dreifachintegral, nicht um eine Anwendung der Transformationsformel.