Höhere Mathematik II, SS2014
M. Hortmann

Blatt 7

bitte heften Sie dieses Blatt vor Ihre Lösungen

Namen									**Gruppennr.**	**Tutor**
1a	b	c	2a	b	3a	b	c	d	**Summe**	**bearbeitet**
1	1	1	1	1	1	1	1	1	6 Punkte=100%	

Aufgabe 1 (Substitutionsregel)

Berechnen Sie mit Hilfe geeigneter Substitutionen die folgenden Integrale

a) $\int\limits_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$, b) $\int\limits_e^{e^2} \frac{dx}{x(\log x)^3}$

c) Die Abbildung $\sin :]-\pi/2,\pi/2[\rightarrow]0,1[$ ist bijektiv und stetig differenzierbar. Die inverse Abbildung $]0,1[\rightarrow]-\pi/2,\pi/2[$ heißt „Arcus Sinus", geschrieben arcsin. Diese Funktion ist selbst auch stetig differenzierbar. Wegen $\arcsin\circ\sin=\mathrm{id}$ gilt nach Kettenregel $1=(\arcsin'(\sin x))\sin'(x)=$ $=(\arcsin'(\sin x))\cdot(\cos x)$. Also folgt $\arcsin'(\sin x)=\frac{1}{\cos x}$ [1] . Setzen wir $y=\sin x$, so ist $\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$, also insgesamt $\arcsin'(y)=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ [2].

Zeigen Sie nun, mit diesem Wissen ausgestattet, daß $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{(x+2)(3-x)}}=\arcsin(0{,}2)+\arcsin(0{,}6)$.

Aufgabe 2

Man berechne a) $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx$ für $\alpha>1$. Was ist mit $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x}dx$? b) $\int\limits_1^\infty \frac{1}{1+x^2}dx$.

1 Für $-\pi/2<x<\pi/2$ ist $\cos x>0$, d.h. es wird nicht durch Null dividiert, und es ist auch $\cos x=\sqrt{1-\sin^2 x}$.

2 Dies ist offenbar eine ähnliche Rechnung wie bei der Ableitung des Arcus Tangens.

Aufgabe 3

Wir nennen eine Differentialform $\alpha=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\,dx_i$, die auf einer offenen Teilmenge $U\subset\mathbb{R}^n$ gegeben ist, **exakt**, wenn es eine Funktion f auf U gibt mit $df=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i=\alpha$, wenn also für alle i gilt: $\frac{\partial f}{\partial x_i}=\alpha_i$. Wegen der Symmetrie der zweiten Ableitungen[3] ist $\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)$, d.h. bei einer exakten Form ist

$$(*)\quad \frac{\partial\alpha_i}{\partial x_j}=\frac{\partial\alpha_j}{\partial x_i}\ .$$

Gilt für eine 1-Form α die Gleichung (*), so nennen wir sie **geschlossen**.
Offenbar hat man dann: jede exakte Form ist geschlossen.

Sei nun $U:=\mathbb{R}^2-\{0\}$ und $\alpha=\frac{y}{x^2+y^2}dx-\frac{x}{x^2+y^2}dy$.

a) Man zeige: α ist geschlossen.

b) Sei $\gamma:[0,2\pi]\to U$, $t\mapsto\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}$ die übliche Parametrisierung des Einheitskreises.

Man berechne $\int_\gamma \alpha$.

c) Begründen Sie, weshalb aus dem Ergebnis von b) folgt, daß α auf U nicht exakt ist.

Nicht immer ist also eine geschlossene Form exakt. Ob dies der Fall ist, hängt von der Gestalt des Gebiets ab, auf dem die Form definiert ist. Das Gebiet darf keine Löcher besitzen.

d) Nehmen Sie aus U die negative x-Achse heraus und nennen die so entstandene offene Menge V. Offenbar ist V sternförmig bzgl. des Punkts $x_0=(1,0)$! Anders als U besitzt V keine Löcher.

Parametrisieren Sie die Strecke von x_0 zu einem anderen Punkt $x\in V$ durch $\gamma_x(t):=x_0+t(x-x_0)$, berechnen Sie $f(x):=\int_{\gamma_x}\alpha$ und zeigen Sie, daß $df=\alpha$.

D.h. die geschlossene Form α ist auf V, aber nicht auf U exakt. Beachten Sie, daß die in U um das Loch in U herum geschlossene Kurve aus b) sich in V nicht mehr bilden läßt.

3 Wir nehmen hier alle Funktionen als hinreichend oft stetig differenzierbar an.