Höhere Mathematik II, SS2014
M. Hortmann

Blatt 6

bitte heften Sie dieses Blatt vor Ihre Lösungen

Namen							**Gruppennr.**	**Tutor**
1a	b	2	3a	b	4	5	**Summe**	**bearbeitet**
1	1	1	1	1	1	1	5 Punkte=100%	

Berechnung von Integralen mit Riemann-Summen, Stammfunktionen, Partieller Integration, Partialbruchzerlegung; Länge einer Kurve

Aufgabe 1

a) Berechnen Sie das Integral $\int_0^1 x^2\,dx$ mittels Riemann-Obersummen durch: $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2\frac{1}{n}$.

b) Berechnen Sie das Integral $\int_0^1 x^2\,dx$ mit Hilfe einer geeigneten Stammfunktion.

Aufgabe 2

Ist $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig, so beweist man durch Betrachtung der entsprechenden Riemann-Summen leicht die Abschätzung $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx$.

Benutzen Sie dies, um zu zeigen, daß $\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}\frac{\sin nx}{x^2+n^2}\,dx=0$.

Aufgabe 3

Mittels partieller Integration berechne man für $x\in\mathbb{R}$,$x>1$ und $n\in\mathbb{Z}$ das Integral $\int_1^x t^n\log t\,dt$

a) für $n\neq-1$, b) für $n=-1$

Aufgabe 4

Sei $f:]0,\infty[\to \mathbb{R}$ gegeben durch $\frac{1}{x^3+6x^2+11x+6}$.
Finden Sie eine Stammfunktion von f mit folgender Methode:

Der obige Nenner besitzt drei verschiedene reelle Nullstellen x_1, x_2, x_3. Der Bruch läßt sich also schreiben in der Form $\frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2} + \frac{C}{x-x_3}$. Indem Sie zunächst x_1, x_2, x_3 und dann A,B,C bestimmen, können Sie anschließend eine Stammfunktion hinschreiben. (Methode der Partialbruchzerlegung.)

Aufgabe 5
Länge einer Kurve:

Sei durch $c:[a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Kurve im $\mathbb{R}^n$ gegeben.
Wählt man eine Zerlegung $Z=[a=t_0<t_1<\ldots<t_n=b]$, so stellt der Streckenzug $[c(t_0), c(t_1)], \ldots, [c(t_{n-1}), c(t_n)]$ eine polynomiale Approximation der Kurve dar. Offenbar ist die Summe $\sum_{i=1}^{n} \|c(t_i)-c(t_{i-1})\|$ eine umso genauere Approximation der Länge der Kurve, je feiner die Zerlegung ist.

Nun ist aber $\frac{c(t_i)-c(t_{i-1})}{t_i-t_{i-1}} \simeq c'(t_i)$, also $\|c(t_i)-c(t_{i-1})\| \simeq \|c'(t_i)\|(t_i-t_{i-1})$.
Man erhält also (präzise Abschätzungen auslassend) $\sum_{i=1}^{n} \|c(t_i)-c(t_{i-1})\| \simeq \sum_{i=1}^{n} \|c'(t_i)\|(t_i-t_{i-1})$.
Letzteres ist aber eine Riemann-Summe und man kann daher im Grenzwert die Formel erwarten:

Länge der Kurve= $\int_a^b \|c'(t)\|\,dt$

Berechnen Sie auf diese Weise unter der Benutzung der Parametrisierung $c(t) := \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ den Umfang des Einheitskreises.