Höhere Mathematik II, SS2014
M. Hortmann

Blatt 4

bitte heften Sie dieses Blatt vor Ihre Lösungen

Namen							**Gruppennr.**	**Tutor**
1	2a	b	3	4a	b	c	**Summe**	**bearbeitet**
1	1	1	1	1	1	1	5 Punkte=100%	

Aufgabe 1

Die Regeln von l'Hôpital folgen unmittelbar aus dem 2. Mittelwertsatz.

In der Vorlesung hatten wir folgende Version:

Sind *f*,*g* in einem offenen Intervall um 0 differenzierbare reellwertige Funktionen mit *f*(0)=*g*(0)=0, so folgt $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, falls der Limes auf der rechten Seite existiert.

Natürlich folgt auch sofort:
Sind *f*,*g* in einem offenen Intervall um x_0 differenzierbare reellwertige Funktionen mit $f(x_0)=g(x_0)=0$, so folgt $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x_0)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, falls der Limes auf der rechten Seite existiert.

Berechnen Sie durch 2-fache Anwendung dieser Regel den Grenzwert $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1+\cos\pi x}{x^2-2x+1}$.

Aufgabe 2

Man kann den zweiten Mittelwertsatz auch benutzen, um eine l'Hôpital-Regel für folgende Situation aufzustellen:
Seien *f*,*g* auf dem offenen Intervall $]a,\infty[$ differenzierbar und sei $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=\infty$.
Dann ist $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, falls der Grenzwert auf der rechten Seite existiert.

Man berechne damit:

a) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{\exp(x)}$

b) $\lim_{x\to\infty} \frac{\log(x)}{\sqrt{x}}$

Aufgabe 3

Ist f in einem offenen Intervall $I \subset R$, welches den Punkt x_0 enthält, n-mal differenzierbar, so hat man für $x \in I$ die Taylorformel mit Rest:

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i+\frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \text{ für ein } \zeta \text{ zwischen } x_0 \text{ und } x .$$

Man stelle mit Hilfe dieser Formel fest , bis zu welchem Term man die Exponentialreihe berechnen muß, um die Zahl e mit einer Genauigkeit von 10^{-6} zu erhalten.

Aufgabe 4

a) Ausgehend von den Additionstheoremen für Sinus und Cosinus beweise man das Additionstheorem für Tangens: $\tan(x+y)=\frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$ (Für welche $x, y \in \mathbb{R}$?)

b) Man beweise die Gleichung $\pi/4=4\arctan(1/5)+\arctan(1/239)$.
Dazu setze man x=arctan(1/5), also tan(x)=1/5, berechne nach obigem Additionstheorem tan(2x), tan(4x), und zeige $\tan(4x-\pi/4)=1/239$.

c) Auf dem letzten Aufgabenzettel haben Sie eine Potenzreihe für arctan konstruiert.
Benutzen Sie die obige Taylorformel, um festzustellen, bis zu welchem Term Sie diese Reihe mit x=1/239 und mit x=1/5 berechnen müssen, um π mit einer Genauigkeit von 10^{-6} zu erhalten.