Höhere Mathematik II, SS2014
M. Hortmann

Blatt 2

bitte heften Sie dieses Blatt vor Ihre Lösungen

Namen								Gruppennr.	Tutor
1a	b	c	2	3	4a	b	c	**Summe**	**bearbeitet**
1	1	1	1	1	1	1	1	6 Punkte=100%	

Aufgabe 1

Sei $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $f(x,y,z) := \begin{pmatrix} f_1(x,y,z) \\ f_2(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x y^2 + y z \\ x + y + z^2 \end{pmatrix}$ und es sei $u_0 := (1,2,3)$.

a) Man berechne die Ableitung $Df(u_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(u_0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(u_0) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(u_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(u_0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(u_0) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(u_0) \end{pmatrix}$.

b) Man setze $h := f_1 \cdot f_2$ und benutze die Produktregel zur Berechnung von $Dh(u_0)$.

c) Sei $U := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x,y,z > 0\}$. Man betrachte die Abbildung f_1 aus a) diesmal als Abbildung $U \to \mathbb{R}$. Offenbar ist $u_0 = (1,2,3) \in U$ und es gilt $\forall u \in U: f_1(u) \neq 0$. Man setze $g(x) := 1/f_1(x)$ und benutze die Quotientenregel, um $Dg(u_0)$ zu berechnen.

Aufgabe 2

Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir wissen bereits, daß die Abbildung $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die durch $x \mapsto x^n$ gegeben ist, die Ableitung $f'(x) = n x^{n-1}$ besitzt.
Man setzt üblicherweise $\mathbb{R}_+^* := \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$. Betrachtet man jetzt die Abbildung $g:\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, die gegeben ist durch $x \mapsto x^{1/n}$, so ist offensichtlich $(f \circ g)(x) = x$.

Man nehme an, g sei in x differenzierbar und berechne mit Hilfe der Kettenregel die Ableitung $g'(x)$.

Aufgabe 3

Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ gegeben durch $x\mapsto\begin{cases} x^{1/2} & x\geq 0 \\ (-x)^{1/2} & x\leq 0 \end{cases}$.

Man zeige: *f* ist in $x_0=0$ nicht differenzierbar.

Aufgabe 4

Sei $T:E\to F$ eine lineare Abbildung zwischen Banachräumen. Es gebe eine Zahl $M\geq 0$, so daß $\forall x\in E: \|T(x)\|\leqslant M\|x\|$.[1]

a) Man zeige: T ist stetig in $x_0=0$.

b) Man zeige: Ist *T* stetig in 0, so auch in jedem anderen Punkt[2].

c) Für die durch die durch die Matrix $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ gegebene lineare Abbildung $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ finde man eine solche Schranke *M* und zeige, daß für dieses *M* tatsächlich $\forall x\in\mathbb{R}^3: \|T(x)\|\leqslant M\|x\|$.

---

1 Man sagt dann, *T* sei „beschränkt".

2 Beschränkte lineare Abbildungen sind also stetig. Auch umgekehrt ist es nicht schwer zu zeigen, daß stetige lineare Abbildungen beschränkt sind. Man beachte auch, daß auf $\mathbb{R}^n$ definierte lineare Abbildungen immer stetig bzw. beschränkt sind