Höhere Mathematik II, SS2014
M. Hortmann

Blatt 1

bitte heften Sie dieses Blatt vor Ihre Lösungen

<table>
<tr><th colspan="6">Namen</th><th>Gruppennr.</th><th>Tutor</th></tr>
<tr><td colspan="6"></td><td rowspan="4"></td><td rowspan="4"></td></tr>
<tr><td colspan="6"></td></tr>
<tr><td colspan="6"></td></tr>
<tr><td colspan="6"></td></tr>
<tr><td>1a</td><td>b</td><td>c</td><td>d</td><td>2a</td><td>b</td><td>Summe</td><td>bearbeitet</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>5 Punkte=100%</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Vorbemerkungen:

In der Differentialrechnung haben Sie es mit Gleichungen der Form $\lim_{\zeta\to 0} f(\zeta)=a$ zu tun, wobei $f:U\to F$, $U\subset E$ offen, E, F Banachräume, $a\in F$.

Erinnern Sie sich in diesem Zusammenhang, daß die Gleichung $\lim_{\zeta\to 0} f(\zeta)=a$ definitionsgemäß folgendes bedeutet:

$$\forall\epsilon>0\exists\delta>0\forall\zeta\in U: \|\zeta\|<\delta \;\Rightarrow\; \|f(\zeta)-a\|<\epsilon \,.$$

Wir nennen f differenzierbar im Punkt x_0 , wenn es eine stetige lineare Abbildung[1] $T:E\to F$ gibt, für die gilt: (*) $\lim_{\zeta\to 0}\dfrac{\|f(x_0+\zeta)-f(x_0)-T(\zeta)\|}{\|\zeta\|}=0$.

Dies ist gleichbedeutend mit
(**) $\forall\epsilon>0\exists\delta>0\forall\zeta\in E:\; \|\zeta\|<\delta \;\Rightarrow\; \|f(x_0+\zeta)-f(x_0)-T(\zeta)\|\leqslant\epsilon\|\zeta\|$ [2] .

Wenn es überhaupt eine solche stetige lineare Abbildung gibt, so ist sie eindeutig bestimmt und wird Ableitung von f in x_0 genannt, und als $Df(x_0)$ oder $f'(x_0)$ geschrieben.
Wird eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ durch eine Matrix beschrieben, so identifizieren wir sie mit dieser Matrix. In diesem Sinne ist also die Ableitung häufig eine Matrix. Sind die Banachräume E,F beide eindimensional, also gleich $\mathbb{R}$, so identifizieren wir eine lineare Abbildung $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit einer 1x1-Matrix, also einer Zahl. In diesem doppelt-eindimensionalen Fall kann man also sagen, die Ableitung sei eine Zahl.

Bei den folgenden Aufgaben benutzen Sie noch keinerlei „Differentiationsregeln“.

---

1 Lineare Abbildungen $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ sind immer stetig.
2 Hinten steht „kleinergleich“, um den Fall $\zeta=0$ nicht ausschließen zu müssen.

Aufgabe 1

a) Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ gegeben durch $f(x)=3+7x+15x^2$.
Beweisen Sie, daß f in $x_0=0$ differenzierbar ist, indem Sie zeigen, daß der Grenzwert $\lim_{\zeta\to 0}\frac{f(x_0+\zeta)-f(x_0)}{\zeta}$ existiert. Dieser Grenzwert ist dann auch die Ableitung.

b) Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ gegeben durch $f(x)=x^2$. Ist jetzt $x_0\in\mathbb{R}$, so berechnen Sie $a, b\in\mathbb{R}$ so, daß $f(x)=b+a(x-x_0)+(x-x_0)^2$. Jetzt können Sie den Grenzwert $\lim_{\zeta\to 0}\frac{f(x_0+\zeta)-f(x_0)}{\zeta}$ leicht berechnen und so die Differenzierbarkeit von f in jedem Punkt zeigen. Tun Sie es!

c) Sei $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y)=3+7x+5y+15xy$.
Berechnen Sie für $x_0=(0,0)$ die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0)$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0)$.

d) Das Ergebnis von c) liefert Ihnen die Matrix der partiellen Ableitungen von f in x_0. Benutzen Sie diese, um (*) oder (**) und damit tatsächlich die Differenzierbarkeit von f in x_0 zu beweisen.

Aufgabe 2

Bei den beiden folgenden (eigentlich trivialen) Teilaufgaben müssen Sie zunächst die Ableitung raten und dann (*) oder(**) zeigen.

a) Seien E,F Banachräume, $U\subset E$ offen, $x_0\in U$, $f:U\to F$ sei konstant, d.h. es gibt ein $b\in F$ so daß für alle $x\in U$: $f(x)=b$.

Zeigen Sie, daß f in x_0 differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitung $Df(x_0)$.

b) Seien E,F Banachräume, $f:E\to F$ sei eine stetige lineare Abbildung, es sei $b\in F$ und es seit $g:E\to F$ gegeben durch $g(x)=b+f(x)$.

Zeigen Sie: g ist in jedem Punkt $x_0\in E$ differenzierbar, und geben Sie die Ableitung $Dg(x_0)$ an.