Mathematik II für Physiker und Elektrotechniker SS04
Aufgabenblatt 7

Aufgabe 1

Studieren Sie den in der Vorlesung und unten definierten Begriff der Derivation und zeigen Sie, daß für eine im Nullpunkt des $\mathbb{R}^2$ gebene Derivation *X* gilt:

Ist $f_1(x,y)=x^2,\ f_2(x,y)=xy,\ f_3(xy)=y^2$, so ist $X(f_1)=X(f_2)=X(f_3)=0$

Aufgabe 2

Man betrachte folgende Karten auf $M=\mathbb{R}^2$:

$\varphi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\varphi_1(x,y)=(x,y)$
$\varphi_2 : U_2=\mathbb{R}^2-\{(x,0)\,|\,x\geqslant 0\}\to]0,\infty[\times]0,2\pi[$ mit $\varphi_2(x,y)=(r,\theta)$, wobei
$x=r\cos(\theta),\ y=r\sin(\theta)$.

Ist jetzt *f* differenzierbar in U_2 , so gilt dort $df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=\frac{\partial f}{\partial r}dr+\frac{\partial f}{\partial \theta}d\theta$.

Drücken Sie jetzt $dx=d(r\cos\theta)=r\,d\cos\theta+\cos\theta\,dr$ und dy als Linearkombinationen von dr und $d\theta$ aus und benutzen dies, um die Derivationen $\frac{\partial}{\partial r},\frac{\partial}{\partial \theta}$ als Linearkombinationen von $\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}$ auszudrücken.

Aufgabe 3

Betrachten wir die Abbildung durch $z\to z^2$ gegebene Abbildung $\varphi : \mathbb{C}\to\mathbb{C}$. Wenn wir diese Abbildung als Abbildung $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ auffassen, erhalten wir Komponentenfunktionen $\varphi=\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}$.

Man berechne die Gradientenvektorfelder $\nabla\varphi_1=\begin{pmatrix}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\end{pmatrix}$ und $\nabla\varphi_2=\begin{pmatrix}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\end{pmatrix}$ und zeige, daß sie in jedem Punkt des $\mathbb{R}^2$ aufeinander senkrecht stehen.
Wie sehen die Stromlinien dieser Vektorfelder aus?

Man mache eine Skizze der geometrischen Gestalt beider Vektorfelder, vorzugsweise mit Hilfe eines geeigneten Computerprogramms, z.B. Gnuplot.

Zur Definition des Tangentialraums

Tangentialraum des $\mathbb{R}^n$

In jedem Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ denken wir uns die Menge der Vektoren des $\mathbb{R}^n$ mit ihrem Fußpunkt in *x*. Diesen *Tangentialraum in x* können wir auch formal definieren als $T_x := T_x \mathbb{R}^n := \{x\} \times \mathbb{R}^n$ und durch Operationen in der zweiten Komponente, nämlich durch $\lambda(x,v) + \mu(x,w) := (x, \lambda v + \mu w)$ auf T_x die Struktur eines in natürlicher Weise zum $\mathbb{R}^n$ isomorphen Vektorraums erklären. T_x ist sozusagen eine in den Punkt *x* verschobene Kopie des $\mathbb{R}^n$.

Zur Vorstellung des Tangentialraums gehört auch, daß Vektoren im Tangentialraums eines Punktes verschieden sind von jedem Vektor im Tangentialraum eines anderen Punktes.

Ist $V \subset \mathbb{R}^n$ offen, so setzen wir $TV := \bigcup_{x \in V} T_x = V \times \mathbb{R}^n$ und nennen TV Tangentialraum von *V*.

Tangentialraum der S^2

In jedem Punkt $x \in S^2$ denken wir uns die Punkte der Tangentialebene an die S^2 in *x* als Vektoren mit Fußpunkt in *x*. Diesen Tangentialraum in *x* können wir auch formal definieren als $T_x := T_x S^2 := \{x\} \times U_x$, wobei auf Grund der speziellen Geometrie der Sphäre $U_x = \{ y \in \mathbb{R}^3 | \langle x, y \rangle \}$. Ist $V \subset S^2$ offen, so setzen wir wie oben $TV := \bigcup_{x \in V} T_x S^2$.

Tangentialvektoren als Derivationen

Während wir uns den Tangentialraum $T_x S^2$ im vorherigen Beispiel als Unterraum des $\mathbb{R}^3$ vorstellen können, müssen wir bei allgemeineren Mannigfaltigkeiten, die nicht a priori als Teilmengen eines $\mathbb{R}^n$ gegeben sind, anders vorgehen. Dabei machen wir uns die Tatsache zu Nutze, daß im $\mathbb{R}^n$ Tangentialvektoren und Richtungsableitungen in eineindeutiger Beziehung stehen.

Klären wir diese Begriffe zunächst im $\mathbb{R}^n$. Sei $x \in \mathbb{R}^n$ und $\mathcal{E}_x$ die Menge der in einer offenen Umgebung von x definierten differenzierbaren (reellwertigen) Funktionen. Ist jetzt $v_x := (x, v) \in T_x$ mit $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ und $f \in \mathcal{E}_x$, so setzen wir $v_x(f) := \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$.

Offenbar ist $v_x(\lambda f + \mu g) = \lambda v_x(f) + \mu v_x(g)$ und $v_x(fg) = f(x) v_x(g) + g(x) v_x(f)$. Eine Abbildung $\mathcal{E}_x \to \mathbb{R}$ mit diesen Eigenschaften nennt man eine *Derivation in x,* d.h. Richtungsableitungen in *x* sind Derivationen in *x* . Es ist umgekehrt auch nicht schwer zu zeigen, daß jede Derivation in *x* durch eine Richtungsableitung ensteht.

In Anlehnung an die Gleichung $v_x(f) := \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ schreiben wir auch

$v_x := \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial}{\partial x_i}(x)$ Wir identifizieren also $T_x \mathbb{R}^n$ mit dem Vektorraum der Derivationen in *x* und haben gleichzeitig die Derivationen $\frac{\partial}{\partial x_i}(x)$ als Basis von $T_x \mathbb{R}^n$.

Mittels Karten können wir diese Begriffe sofort auf Mannigfaltigkeiten übertragen.

Ist demnach *M* eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $x \in M$ so definieren wir $T_x M$ als Vektorraum der Deriviationen in *x*. Ist $\varphi : U \to V$ eine in einer Umgebung von *x* definierte Karte und $f \in \mathcal{E}_x$, so setzen wir $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(x)\right)(f) := \frac{\partial\left(f \circ \varphi^{-1}\right)}{\partial x_i}(\varphi(x))$.

Damit ist bezüglich der Karte φ mit den Derivationen $\frac{\partial}{\partial x_i}(x)$ eine Basis von $T_x M$ erklärt. Die x_i sind hier die Namen der Koordinaten in *V*. Je nach Kontext können diese Namen auch *x,y* oder *x,y,z* oder r, θ, φ lauten.