Mathematik II für Physiker und Elektrotechniker SS04
Aufgabenblatt 6

Sei M ein Hausdorffraum, $U \subset M$ offen, $V \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\varphi : U \to V$ ein Homöomorphismus. Dann heißt φ *Karte von M*. Ist $\left(\varphi_i : U_i \to V_i\right)_{i \in I}$ eine Familie von Karten[1] von M, so bezeichnet man sie als *Atlas von M*, wenn die U_i eine offene Überdeckung von M bilden, d.h. wenn $\bigcup_{i \in I} U_i = M$.

Ist auf M ein Atlas gebenen, so nennt man M eine *n-dimensionale (topologische) Mannigfaltigkeit.*

Zu zwei sich überlappenden Karten φ_i, φ_j bilde man die Mengen $V_{ij} := \varphi_i\left(U_i \cap U_j\right) \subset V_i$ und $V_{ji} := \varphi_j\left(U_i \cap U_j\right) \subset V_j$. Offenbar ist jetzt $\varphi_{ji} := \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : V_{ij} \to V_{ji}$ ein Homöomorphismus zwischen offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$; man nennt φ_{ji} auch *Kartenwechsel Abbildung*.

Wenn zu einem Atlas einer Mannigfaltigkeit alle Kartenwechselabbildungen und ihre Inversen beliebig oft differenzierbar sind, so redet man von einer *differenzierbaren Mannigfaltigkeit*.

Aufgabe 1

Gegeben sei $M = S^1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 = 1 \right\}$.

a) Sei $U_1 := S^1 - \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Wir denken uns $\mathbb{R}$ als x-Achse im $\mathbb{R}^2$ eingebettet und definieren $\varphi_1 : U_1 \to \mathbb{R}$, indem wir $\varphi_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ als den Schnittpunkt der Geraden durch $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ mit der x-Achse definieren. Analog definieren wir $U_2 := S^1 - \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ und $\varphi_2 : U_2 \to \mathbb{R}$. Damit haben wir einen Atlas auf *M*.

Man berechne nun die Mengen V_{12} und V_{21} und die Kartenwechselabbildungen φ_{12} und φ_{21}. Sind die Kartenwechselabbildungen (beliebig oft) differenzierbar?

---

[1] Die Dimension des Zielraums $\mathbb{R}^n$ sei für alle Karten der Familie gleich.

b) Wir betrachten jetzt einen anderen Atlas auf $M = S^1$. Dazu setzen wir

$$U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in S^1 \middle| x > 0 \right\}, U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in S^1 \middle| y > 0 \right\}, U_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in S^1 \middle| x < 0 \right\}, U_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in S^1 \middle| y < 0 \right\}$$

$$V_i :=]-1,1[, \quad i = 1 \ldots 4; \quad \varphi_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y, \quad \varphi_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x, \quad \varphi_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y, \quad \varphi_4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x.$$

Man berechne die Kartenwechselabbildungen $\varphi_{12}, \varphi_{21}, \varphi_{14}, \varphi_{41}, \varphi_{23}, \varphi_{32}, \varphi_{34}, \varphi_{43}$ und die zugehörigen Definitions- und Bildbereiche.

Sind die Kartenwechselabbildungen (beliebig oft) differenzierbar?

c) Man konstruiere einen Atlas aus zwei Karten für $M = S^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| x^2 + y^2 + z^2 = 1 \right\}$

durch Projektion vom Nord- bzw. Südpol auf die xy-Ebene, in völliger Analogie zu 1a.
Man berechne auch hier die Kartenwechselabbildung und ihre Inversen und untersuche sie auf Differenzierbarkeit.

Betrachten wir alle Geraden, die im $\mathbb{R}^2$ parallel zur x-Achse in ganzzahligen Abständen verlaufen. Wie verteilen sich deren Urbilder unter einer der beiden obigen Karten auf der Sphäre? (Lösung ggf. auf einem Ei zeichnen ☺)

d) Freiwillige Zusatzaufgabe
Es sei $\mathbb{P}^3 := \{ g \,|\, g$ ist eindimensionaler Unterraum des $\mathbb{R}^4 \}$. $\mathbb{P}^3$ heißt auch „3dimensionaler reeller projektiver Raum". Einen eindimensionalen Unterraum g des $\mathbb{R}^4$, also eine Gerade durch den Nullpunkt, beschreibt man durch Angabe eines Punktes $(x_1, x_2, x_3, x_4) \neq 0$ auf dieser Geraden und schreibt kurz $g = [x_1, x_2, x_3, x_4]$.
Offenbar gilt für $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$: $[x_1, x_2, x_3, x_4] = [\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \lambda x_4]$

Man hat eine natürliche Abbildung $\pi : \mathbb{R}^4 - \{0\} \to \mathbb{P}^3$, indem man jedem Punkt von $\mathbb{R}^4 - \{0\}$ die durch ihn bestimmte Gerade durch den Nullpunkt zuordnet; in obiger Schreibweise hat man also $\pi(x_1, x_2, x_3, x_4) = [x_1, x_2, x_3, x_4]$. Die Abbildung π wird benutzt, um eine Topologie auf $\mathbb{P}^3$ zu erklären: Eine Menge $U \subset \mathbb{P}^3$ liegt in dieser Topologie – man sagt auch sie sei offen im $\mathbb{P}^3$ – wenn die Urbildmenge $\pi^{-1}(U)$ als Teilmenge des $\mathbb{R}^4$ offen ist. Die Topologieeigenschaften sind nicht schwer nachzuweisen, für den Nachweis der Hausdorffeigenschaft muß man etwas überlegen. (Weitere Zusatzaufgabe!)

Auf $\mathbb{P}^3$ konstruiert man einen Atlas aus 4 Karten.
Dazu setzt man zunächst $U_1 := \{[x_1, x_2, x_3, x_4] \mid x_1 \neq 0\}$, und entsprechend U_2, U_3, U_4,

$$\varphi_1 : U_1 \to \mathbb{R}^3, \varphi_1([x_1, x_2, x_3, x_4]) := \left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \frac{x_4}{x_1}\right),$$

$$\varphi_2 : U_2 \to \mathbb{R}^3\ \varphi_2([x_1, x_2, x_3, x_4]) := \left(\frac{x_1}{x_2}, \frac{x_3}{x_2}, \frac{x_4}{x_2}\right), \text{ etc.}$$

Man beachte, daß z.B. $\varphi_1^{-1}(x, y, z) = [1, x, y, z]$.

Man berechne einige Kartenwechselabbildungen, z.B. φ_{12}, φ_{21}, φ_{23}, φ_{32} und untersuche sie auf Differenzierbarkeit.

$\mathbb{P}^3$ ist also eine dreidimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit, die nicht wie die vorherigen Beispiele, als Untermenge eines $\mathbb{R}^n$ gegeben ist.