Mathematik II für Physiker und Elektrotechniker SS04
Aufgabenblatt 5

Aufgabe 1

Sei Δ das durch die Punkte $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}6\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$ gegebene Dreieck. Man weise für $\omega = xdy$ und $\omega = xdx$ die Gültigkeit der Greenschen Formel $\int_\Delta d\omega = \int_{\partial\Delta} \omega$ nach.

Aufgabe 2

a) Auf $G := \mathbb{R}^2 - \left\{\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}\right\}$ sei $\varphi(x,y)$ der Winkel (im Bogenmaß) zwischen $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ und der reellen Achse. Offenbar ist $\forall \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in G : 0 < \varphi(x,y) < \pi$, und im im ersten Quadranten ist offenbar $\varphi(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$. Außerdem sei auf G: $r(x,y) := \sqrt{x^2+y^2}$.

Man zeige nun durch Ausrechnen der linken Seite: $rdr \wedge d\varphi = dx \wedge dy$

b) Umgekehrt kann man natürlich *x*,*y* via $x = r\cos\varphi,\ \ y = r\sin\varphi$ als Funktionen von r,φ auffassen und. $dx = d(r\cos\varphi) = \cos\varphi \cdot dr + r \cdot d\cos\varphi = \cos\varphi \cdot dr - r \cdot \sin\varphi d\varphi$ berechnen. Man finde einen entsprechenden Ausdruck für dy und zeige nun durch Ausrechnen der rechten Seite, daß $rdr \wedge d\varphi = dx \wedge dy$.

c) Gehen wir jetzt in den $\mathbb{R}^3$. Es sei wieder $r(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\varphi(x,y,z)$ sei der Winkel zwischen dem Punkt $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ und der positiven x-Achse, und $\theta(x,y,z)$ sei der Winkel, den die Verbindungsstrecke zwischen Nullpunkt und dem Punkt $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ mit der x-y-Ebene bildet. Offenbar ist $x = r\cos\varphi\cos\theta$, $y = r\sin\varphi\cos\theta$ und $z = r\sin\theta$. Analog b) drücke man jetzt $dx \wedge dy \wedge dz$ durch $dr \wedge d\varphi \wedge d\theta$ aus.

d) Freiwillige Zusatzaufgabe: Man denke sich r,φ,θ als Funktionen von *x*,*y*,*z* und verifiziere den in c) gefundenen Ausdruck $\lambda \cdot dr \wedge d\varphi \wedge d\theta = dx \wedge dy \wedge dz$ durch Ausrechnen von $dr \wedge d\varphi \wedge d\theta$, also ganz in Analogie zu a).

Topologie:

Sei M eine Menge, $\mathcal{O} \subset \mathfrak{P}(M)$ ein System von Teilmengen von *M*. Es gelte:

1. $M, \emptyset \in \mathcal{O}$
2. $\forall U,V \in \mathcal{O}: \quad U \cap V \in \mathcal{O}$
3. Ist $(U_i)_{i\in I}$ eine Familie von Teilmengen von M mit $\forall i \in I: U_i \in \mathcal{O}$, so gilt auch für die Vereinigung: $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{O}$

Sind diese drei Eigenschaften erfüllt, so heißt das Paar $(M, \mathcal{O})$ topologischer Raum, $\mathcal{O}$ heißt „Topologie auf *M*"

Eine Familie $(U_i)_{i\in I}$ bedeutet dabei nichts anderes, als daß eine „Index.menge" *I* gegeben ist und zu jedem $i \in I$ eine Menge $U_i \subset M$.

Die „Vereinigung" $\bigcup_{i\in I} U_i = \{x \in M \,|\, \exists i \in I: \; x \in U_i\}$ ist offenbar selbst Teilmenge von *M*; in ihr kommen gerade alle Elemente aller U_i vor. Natürlich gibt es auch einen „Durchschnitt" $\bigcap_{i\in I} U_i := \{x \in M \,|\, \forall i \in I: \; x \in U_i\}$. Er umfaßt definitionsgemäß genau die Elemente von *M*, die in allen U_i vorkommen.

Ein topologischer Raum $(M, \mathcal{O})$ heißt „hausdorffsch", wenn zu zwei verschiedenen Punkten $x, y \in M$ $U, V \in \mathcal{O}$ existieren mit $x \in U, y \in V$ und $U \cap V = \emptyset$.

Wir benötigen den Begriff des topologischen Raumes, um den Begriff der Mannigfaltigkeit formulieren zu können. Eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit soll nämlich in der „Umgebung eines Punktes so aussehen" wie der $\mathbb{R}^n$: wir benötigen also demnächst Präzisierungen von „Umgebung" und „so aussehen wie", und zwar in der Sprache der Topologie.

Aufgabe 3

Zwar sind die den uns interessierenden topologischen Räumen zugrundeliegendenen Mengen fast sämtlich unendlich, trotzdem konstruiere man einmal sämtliche Topologien auf der 3-elementigen Menge $M := \{1, 2, 3\}$. Da jede Topologie auf *M* Teilmenge von $\mathfrak{P}(M)$ ist und diese Potenzmenge 8 Elemente besitzt, kann es a priori nicht mehr als 256 Topologien auf *M* geben. (In Wirklichkeit sind es viel weniger.)

Welche dieser Topologien sind hausdorffsch, welche nicht?

Falls die Aufgabe zu einfach ist, arbeite man mit einer 4-elementigen Menge.

Aufgabe 4

In einem metrischen Raum $\left(M,d\right)$ heißt eine Teilmenge $U\subset M$ offen, wenn gilt:
$\forall x\in U\ \exists\varepsilon>0: U_\varepsilon(x)\subset U$, oder anders ausgedrückt:
$\forall x\in U\ \exists\varepsilon>0\ \forall y\in M:\ d(x,y)<\varepsilon\ \ \rightarrow\ \ y\in U$.

a) Man zeige: $\mathcal{O}:=\left\{U\subset M \,\middle|\, U \text{ ist offen}\right\}$ ist eine Topologie auf M, die sogenannte „von der Metrik *d* induzierte Topologie", und der dadurch definierte topologische Raum ist hausdorffsch.

b) Die Eigenschaft zwei in der Definition des topologischen Raums bedeutet, daß endliche, aber nicht unbedingt unendliche Durchschnitte offener Mengen offen sind. Man gebe ein Beispiel für diese Tatsache, z.B. für den Fall $M=\mathbb{R}$, versehen mit der üblichen Metrik und der dadurch induzierten Topologie.