Mathematik II für Physiker und Elektrotechniker SS04
Aufgabenblatt 4

Determinanten

Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. In der Schreibweise $A = (a_1,\dots,a_n)$ sind die a_i die Spaltenvektoren von A.
Wir haben die Determinante $\det A = |A|$ definiert durch die Gleichung
$a_1 \wedge \dots \wedge a_n = (\det A) e_1 \wedge \dots \wedge e_n$, wobei $e_1,\dots,e_n$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^n$ ist.
Anschließend wurde nachgerechnet, daß $\det A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon_\sigma \, a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n}$. Es ist $\det A = 0$ genau dann, wenn A nicht invertierbar ist.

Aufgabe 1 Sei

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$ Man berechne det(A) nach obiger Summenformel. (24 Summanden) .

Die Produktformel für Determinanten.
Ist B eine weitere reelle $n \times n$ Matrix, so gilt $\det AB = \det A \cdot \det B$.

Dies sieht man am einfachsten so:
Die durch $\Phi(v_1,\dots,v_n) = v_1 \wedge \dots \wedge v_n$ gegebene Abbildung $\underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{n-\text{mal}} \to \Lambda^n(\mathbb{R}^n)$ ist multilinear, d.h. linear in jedem Argument, z.B. im ersten:
$\Phi(\lambda v_1 + \mu w_1,\dots,v_n) = \lambda\Phi(v_1,v_2,\dots,v_n) + \mu\Phi(w_1,v_2,\dots,v_n)$. Sie ist auch alternierend, d.h. bei Vertauschung zweier Argumente ändert sich das Vorzeichen. Bei der Ableitung obiger Summenformel für die Determinante wird gerade nachgerechnet, daß
$\Phi(v_1,\dots,v_n) = \det V \Phi(e_1,\dots,e_n)$. Nun ist offensichtlich die Abbildung
$\Psi(v_1,\dots,v_n) = (Av_1) \wedge \dots \wedge (Av_n)$ ebenfalls multilinear und alternierend, woraus mit derselben Rechnung $\Psi(v_1,\dots,v_n) = \det V \cdot \Psi(e_1,\dots,e_n)$ folgt. Wegen
$\Psi(e_1,\dots,e_n) = a_1 \wedge \dots \wedge a_n = (\det A) e_1 \wedge \dots \wedge e_n = \det A \cdot \Phi(e_1,\dots,e_n)$ folgt also insgesamt
$\Psi(v_1,\dots,v_n) = \det A \cdot \Phi(v_1,\dots,v_n)$, was wir zu

$$(Av_1) \wedge \dots \wedge (Av_n) = \det A \cdot v_1 \wedge \dots \wedge v_n$$

umschreiben können.

Jetzt ist natürlich auch $((AB)v_1) \wedge \dots \wedge ((AB)v_n) = \det(AB) \cdot v_1 \wedge \dots \wedge v_n$, andererseits gilt
$((AB)v_1) \wedge \dots \wedge ((AB)v_n) = (A(Bv_1)) \wedge \dots \wedge (A(Bv_n)) = \det A \cdot (Bv_1) \wedge \dots \wedge (Bv_n) = \det A \cdot \det B \cdot v_1 \wedge \dots \wedge v_n$
Setzen wir jetzt insbesondere $(v_1,\dots,v_n) = (e_1,\dots,e_n)$ und beachten, daß $e_1 \wedge \dots \wedge e_n$ als

Basiselement von $\Lambda^n\left(\mathbb{R}^n\right)$ von Null verschieden ist, so erhalten wir die Formel

$\det AB = \det A \cdot \det B$.

Wir listen noch die folgenden weiteren Formeln für Determinanten auf

1. $\det A^t = \det A$ (A^t ist die durch Vertauschung der Zeilen- und Spaltenindizes aus A hervorgehende transponierte Matrix.). In der Summenformel für beide Determinanten stehen dieselben Summanden.

2. Besitzt A obere Dreiecksgestalt, sind also die Matrixeinträge unterhalb der Hauptdiagonale Null, so ist $\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} \cdot \dots \cdot a_{nn}$. Diese Aussage bezieht sich natürlich insbesondere auf Diagonalmatrizen, also solche, die außerhalb der Hauptdiagonale Null sind.

Eine elementare Zeilenoperation der Form: Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile ändert die Determinante nicht. Durch wiederholte Anwendung solcher Zeilentransformationen kann man eine Matrix auf obere Dreiecksgestalt bringen und so die Determinante am schnellsten berechnen.

3. Sei $A = \begin{pmatrix} \boxed{B} & 0 \\ 0 & \boxed{C} \end{pmatrix}$ eine Blockmatrix, d.h. eine $n \times n$-Matrix, B eine $k \times k$ - und C eine $l \times l$ -Matrix mit mit $k + l = n$. Dann ist $\det A = \det B \det C$.

4. Aus der $n \times n$-Matrix A entsteht die $(n-1)\times(n-1)$-Matrix A_{ij} durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte. Man bildet die sog. *Kofaktormatrix* $C = \left(c_{ij}\right)$ mittels

$c_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ji}$. Dann gilt: $AC = \det A \cdot E$.

Ist also A invertierbar, so ist $A^{-1} = \frac{1}{\det A} C$.

Auch folgt sofort: $\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$ (Entwicklung der Determinante nach der i-ten Zeile) und $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$ (Entwicklung nach der j-ten Spalte.)

5. Eine Matrix hat genau dann Rang k, wenn k die größte Zahl ist, so daß sich k Zeilen und k Spalten so finden lassen, daß die aus diesen Zeilen und Spalten gebildete Untermatrix eine nicht-verschwindende Determinante besitzt.

Aufgabe 2

a) Man berechne die Determinante der Matrix aus Aufgabe 1 durch Entwicklung nach der zweiten Zeile. Die dabei auftretenden 3x3 Unterdeterminanten berechne man direkt.

b) Man bringe die Matrix durch elementare Zeilenoperationen auf obere Dreiecksgestalt und berechne die Determinante als das Produkt der Hauptdiagonalelemente.

Aufgabe 3 (s. Punkt 4 oben)

Man berechne die Inverse der Matrix $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ mit Hilfe der Kofaktormatrix .

k-Formen und äußere Ableitung

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen.
Eine k-Form ist eine Abbildung $\omega : G \to \Lambda^k \left(\mathbb{R}^n\right)^*$. Da die $dx_i(x) = e^i$ für jedes $x \in G$ eine Basis von $\left(\mathbb{R}^n\right)^*$ bilden, läßt sich ω schreiben als $\omega = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} \alpha_{i_1 \ldots i_k} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$, wobei die $\alpha_{i_1 \ldots i_k}$ Funktionen auf *G* sind.

Man nennt ω stetig, differenzierbar, etc. wenn alle Komponentenfunktionen $\alpha_{i_1 \ldots i_k}$ stetig, differenzierbar, etc. sind. Es ist nützlich, Funktionen als 0-Formen aufzufassen.

Für eine differenzierbare k-Form $\omega = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} \alpha_{i_1 \ldots i_k} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$ definieren wir die *äußere Ableitung* $d\omega$, eine (k+1)-Form, durch $d\omega = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} \left(d\alpha_{i_1 \ldots i_k}\right) \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$.

Ist ω zweimal stetig differenzierbar, so folgt aus der Symmetrie der zweiten partiellen Ableitungen, daß $dd\omega = 0$.

Eine k-Form heißt *geschlossen*, wenn $d\omega = 0$ und exakt, wenn es eine (k-1)-Form η gibt, mit $d\eta = \omega$. Diese Bezeichnungen sind konsistent mit denen, die bereits für 1-Formen eingeführt wurden.

Genauso wie man 1-Formen entlang Kurven integrieren kann, erweisen sich k-Formen als integrierbar auf k-dimensionalen Flächen und Mannigfaltigkeiten. Die äußere Ableitung benötigen wir zur Formulierung eines allgemeinen Satzes (Stokes), der Randintegrale mit Integralen über das Innere von Gebieten in Beziehung setzt.

Aufgabe 4

a) In einem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^3$ seien die hinreichend oft differenzierbaren Formen $\omega = \alpha dx + \beta dy + \gamma dz$ und $\eta = \varphi dx \wedge dy + \psi dx \wedge dz + \chi dy \wedge dz$ gegeben.

Man berechne $d\omega$ und $d\eta$ und zeige $dd\omega = 0$.

b) Sei $\omega = (3x^2y^2 + 4xyz^2 + z)dx + (2x^3y + 2x^2z^2 + z)dy + (4x^2yz + x + y)dz$. Zeigen Sie: ω ist geschlossen.

c) Freiwillig: Finden Sie erst durch Probieren, dann durch Berechnen von $f(x) := \int_{c_x} \omega$, wobei $c_x : [0,1] \to \mathbb{R}^3$, $c_x(t) := tx$ die Strecke $0 \to x$ parametrisiert, eine Funktion *f* mit $df = \omega$, womit nachgewiesen wäre, daß ω sogar exakt ist.