Mathematik II für Physiker und Elektrotechniker SS04
Aufgabenblatt 3

Vektorfelder

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen. Ein Vektorfeld auf *G* ist eine Abbildung $X : G \to \mathbb{R}^n$. X ist bestimmt durch seine Komponenten $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$, wobei $X_i : G \to \mathbb{R}$. Dabei heißt *X* stetig, differenzierbar, etc. wenn die Komponenten X_i entsprechende Eigenschaften haben. Ist $e_1, \dots, e_n$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^n$, so setzt man $e_i(x) := e_i$. Damit wird e_i selbst zu einem (konstanten) Vektorfeld. Ist f eine relle Funktion auf *G* und *X* ein Vektorfeld, so ergibt sich in natürlicher Weise ein neues Vektorfeld *fX* durch die Vorschrift $(fX)(x) := f(x)X(x)$. Außerdem kann man Vektorfelder *X,Y* in natürlicher Weise addieren mit der Vorschrift $(X+Y)(x) := X(x) + Y(x)$. Schließlich schreiben wir das Vektorfeld *X* auch als $X = \sum_{i=1}^{n} X_i e_i$.

Operation von Vektorfeldern auf Funktionen
Vektorfelder „operieren" aber auch in natürlicher Weise auf Funktionen. Man definiert zu einer gegebenen Funktion *f* und einem Vektorfeld *X* eine neue Funktion *Xf* durch

$$(Xf)(x) := Df(x)(X(x)) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) , \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right) \begin{pmatrix} X_1(x) \\ \vdots \\ X_1(x) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} X_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$ definiert. Diese „Richtungsableitung von *f*" erhält man auch als Grenzwert des Differenzenquotienten $\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x + \varepsilon X(x)) - f(x)}{\varepsilon}$, bzw. als Ableitung $(f \circ c)'(0)$, wobei *c* eine Kurve durch *x* ist, die in *x* die Richtung und „Geschwindigkeit" *X(x)* besitzt, z.B. $c :]-\varepsilon, \varepsilon[\to G, \quad c(t) := x + tX(x)$.

Dabei ist offenbar $X(f+g) = Xf + Xg$, andererseits hat man aufgrund der Produktregel der Differentialrechnung die Formel $X(fg) = fXg + gXf$.

Aufgabe 1:
Auf $G = \mathbb{R}^2 - \{0\}$ betrachte man das Vektorfeld $X = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ und die Funktion $f(x) := \|x\|$.
Man berechne Xf .

1-Formen

Zu einem gegebenen endlich-dimensionalen Vektorraum V bezeichnen wir mit V^* den Vektorraum der linearen Abbildungen von V in den Grundkörper, in unserem jetzigen Kontext also $\mathbb{R}$. Ist eine Basis von V gegeben, so identifizieren wir bekanntlich V^* mit den Matrizen $(x_1,\ldots,x_n)$. Bezüglich der gegebenen Basis werden Elemente von V als Spaltenvektoren geschrieben, Elemente von V^* demnach als Zeilenvektoren.

Analog zu Vektorfeldern betrachten wir nun „1-Formen“ als Abbildungen $\omega : G \to \left(\mathbb{R}^n\right)^*$. So eine 1-Form läßt sich also einerseits schreiben als Tupel $\omega = (\omega_1,\ldots,\omega_n)$, wobei die ω_i wieder Funktionen $G \to \mathbb{R}$ sind. Bezeichnen wir andererseits mit $e^i = (0,\ldots 0,1,0,\ldots 0)$ die kanonische Basis von $\left(\mathbb{R}^n\right)^*$, so können wir durch die Vorschrift $e^i(x) := e^i$ die e^i selbst als (konstante) 1-Formen auffassen und schreiben: $\omega = (\omega_1,\ldots,\omega_n) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i e^i$. Zu jeder differenzierbaren Funktion $f : G \to R$ gehört die 1-Form $Df = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} e^i$. Aus historischen Gründen benutzen wir im folgenden in die Schreibweise *df* statt *Df*.

Die Koordinatenfunktionen auf $\mathbb{R}^n$, also die Funktionen $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \to x_i$, bezeichnet man häufig selbst mit x_i. Damit ergibt sich $dx_i = e^i$, woraus sich die Schreibweise $df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$ rechtfertigt. Eine beliebige 1-Form läßt sich also schreiben als $\omega = (\omega_1,\ldots,\omega_n) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i dx_i$.

Eine 1-Form ω auf *G* heißt *exakt*, wenn es eine Funktion *f* auf *G* gibt mit $\omega = df$.
Eine 1-Form ω auf *G* heißt *geschlossen*, wenn für alle *i<j* die *Integrabilitätsbedingung* $\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i}$ erfüllt ist.

Ist ω exakt, $\omega = df$ mit 2-mal stetig differenzierbarem *f*, so ist *f* geschlossen, denn

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i}.$$

1-Formen lassen sich in natürlicher Weise auf 1-dimensionalen Objekten integrieren:
Ist $c:[a,b] \to G$ eine stetig differenzierbare Kurve und ω eine stetige 1-Form auf *G*, so setzen wir: $\int_c \omega := \int_a^b \omega\big(c(t)\big)\big(c'(t)\big)\,dt = \int_a^b \left(\sum_{i=1}^{n} \omega_i\big(c(t)\big) c_i'(t) \right) dt$

Integrale von exakten Formen hängen nur von den Endpunkten der Kurve ab, nicht von ihrem sonstigen Verlauf; insbesondere verschwinden die Integrale von exakten Formen über geschlossenen Kurven, d.h. Kurven deren Anfangs- und Endpunkt zusammenfallen.

Aufgabe 2:

a) Sei $f(x,y) := x^2 y + y^2$. Man berechne $\omega = df$ und sodann $\int_c \omega$, wobei die geschlossene Kurve c das Dreieck mit den Eckpunkten $(-2,-1)$, $(2,-1)$, $(1,2)$ durchläuft.
Dazu zerlege man c in die zugehörigen drei Teilstrecken c_1, c_2, c_3 und berechne $\int_c \omega$ mittels $\int_c \omega = \int_{c_1} \omega + \int_{c_2} \omega + \int_{c_3} \omega$.

(Wenn man eine exakte Form über einen geschlossenen Weg integriert, muß Null herauskommen!)

b) Man zeige, daß die auf $G = \mathbb{R}^2 - \{0\}$ gegebene 1-Form $\omega = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$ geschlossen ist.

c) Man, daß die in b) gegebene Form nicht exakt ist, indem man das Integral $\int_c \omega$ über eine geschlossene Kurve berechnet und einen Wert ungleich Null herausbekommt. Als passende Kurve wähle man z.B. den Einheitskreis, der am besten durch $c:[0,2\pi] \to G$, $c(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ parametrisiert wird.

d) Freiwillige Zusatzaufgabe (vgl. Vorlesungsaufzeichnung):
Ist $\omega = df$ in G mit stetig differenzierbarem f, $c:[a,b] \to G$ stetig differenzierbar, so ist $\int_c \omega = f\left(c(b)\right) - f\left(c(a)\right)$

Analog zu 1-Formen werden wir k-Formen als Felder definieren, die sich in natürlicher Weise auf k-dimensionalen Objekten integrieren lassen. Mit diesem Konzept lassen sich viele für Physik und Elektrotechnik wichtige Integralsätze auf einen Nenner bringen und z.B. auch die Maxwell- und Einsteingleichungen in natürlicher Weise interpretieren. Zur Vorbereitung benötigen wir Hilfsmittel der „multilinearen Algebra“:

$\wedge$-Produkt, äußere Algebra

Ist V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über einem Körper K, $v_1,\ldots,v_k \in V$ so möchten wir Produkte $v_1 \wedge \ldots \wedge v_k$ bilden, die in einem neuen Vektorraum $\Lambda^k V$ liegen, wobei einerseits das Assoziativgesetz gelten soll, andererseits soll dieses Produkt *antikommutativ* sein, d.h. $\forall u,v \in V: \quad u \wedge v = -v \wedge u$, und wie bei jedem Produkt soll das Distributivgesetz gelten: $u \wedge (\lambda v + \mu w) = \lambda(u \wedge v) + \mu(u \wedge w)$. Wir stellen die Frage zurück, ob es so ein *äußeres Produkt* tatsächlich gibt[1], da es sich fast schon durch obige algebraische Forderungen eindeutig ergibt.

Zusätzlich stellen wir noch die Forderung auf, daß bei einer gegebenen Basis $e_1,\ldots,e_n$ von V die Produkte $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k}$, $1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n$ eine Basis von $\Lambda^k V$ bilden. Offenbar läßt sich für *k*>*n* kein solches Basiselement mehr hinschreiben, die $\Lambda^k V$ sind für *k*>*n* also der Nullraum bzw. 0-dimensional, ansonsten besitzt $\Lambda^k V$ die Anzahl von $\binom{n}{k}$ Basiselementen und ist somit $\binom{n}{k}$-dimensional.

Es ist $\Lambda^1 V = V$, $\Lambda^n V$ ist eindimensional und man setzt noch $\Lambda^0 V := K$; letzterer Raum ist damit ebenfalls eindimensional.

Wichtig ist die Aussage, daß $v_1,\ldots,v_k \in V$ sind genau dann linear abhängig sind, wenn $v_1 \wedge \ldots \wedge v_k = 0$.

In $\mathbb{R}^k$ berechnet man: $v_1 \wedge \ldots \wedge v_k = \lambda(e_1 \wedge \ldots \wedge e_k)$, und der Faktor λ erweist sich gerade als „k-Volumen“ des von $v_1,\ldots,v_k$ aufgespannten Parallelepipeds.

Ist $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_n \end{pmatrix}$ eine Matrix mit Koeffizienten in K, sind a_i die Spaltenvektoren von A und e_i die kanonische Basis von K^n, so errechnet man wieder $a_1 \wedge \ldots \wedge a_n = \lambda(e_1 \wedge \ldots \wedge e_n)$ und nennt den Faktor λ *Determinante von A*, det(*A*). Man kann jetzt also anhand der Determinante feststellen, ob die Spaltenvektoren der Matrix linear unabhängig sind, ob also die Matrix invertierbar ist.

---

[1] Man kann z.B. definieren: $\Lambda^k V := \left\{ \phi : \underbrace{V^* \times \ldots \times V^*}_{n-\text{mal}} \to K \mid \ \phi \text{ multilinear und alternierend} \right\}$, wobei „alternierend“ bedeutet, daß bei Vertauschung zweier Argumente sich das Vorzeichen ändert, und „multilinear“, daß z.B. $\phi(\lambda v + \mu w, v_2,\ldots,v_k) = \lambda\phi(v,v_2,\ldots,v_k) + \mu\phi(w,v_2,\ldots,v_k)$. Auf dieser Ebene läßt sich jetzt auch das $\wedge$-Produkt $\Lambda^k V \times \Lambda^l V \to \Lambda^{k+l} V$ definieren. Diese Konstruktionen zur Rechtfertigung der Existenz des äußeren Produkts sind aber nicht erhellender als das direkte Rechnen mit den oben gegebenen axiomatischen Eigenschaften.

Aufgabe 3

a) Man stelle anhand des äußeren Produkts der Spalten der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ fest,

ob diese invertierbar ist.

b) Sei $u = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Man konstruiere 2 weitere Einheits-Vektoren *v*,*w*, so daß *u*,*v*,*w* aufeinander senkrecht stehen. Man rechne nach, daß $u \wedge v \wedge w = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$ ist, daß also das von *u*,*v*,*w* aufgespannte Parallelepiped das Volumen 1 besitzt.