Mathematik II für Physiker und Elektrotechniker SS04
Aufgabenblatt 2

Aufgabe 1.

Wie in der Vorlesung parametrisieren wir einen Parabelbogen durch $c(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}, \ -1 \le t \le 1.$

a) Man berechne die Länge $l(c) = \int_{-1}^{1} \|c'(t)\| \, dt$.

Hinweis: Im Längenintegral tritt der Ausdruck $\sqrt{1+4t^2}$ auf. Mit der Substitution $2t = \sinh(u)$ wird das Integral lösbar. Man erinnere sich, daß $\cosh(u) := \frac{\exp(u)+\exp(-u)}{2}$, $\sinh(u) := \frac{\exp(u)-\exp(-u)}{2}$, so daß offenbar $\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$, $\cosh' = \sinh$ und $\sinh' = \cosh$. Die Funktionen $\cosh, \sinh$ (cosinus hyperbolicus, sinus hyperbolicus) und ihre Umkehrfunktionen arcosh, arsinh sind auf den meisten wissenschaftlichen Taschenrechnern implementiert, aber natürlich auch in Pari.

b) Man setze für $k = 0 \ldots 2N \quad t_k := -1 + \frac{k}{N}$ und $c_k := c(t_k)$. Die Kurvenlänge aus a) ist offenbar auch gleich $\lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{2N} \|c_{k+1} - c_k\|$. Man werte die approximierende Polygonzuglänge $\sum_{k=0}^{2N} \|c_{k+1} - c_k\|$ [1] für $N = 10^4$ oder $N = 10^5$ z.B. mit Pari aus und vergleiche mit dem Ergebnis aus a).

c) freiwillige Zusatzaufgabe:
Sei $c : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ die Parameterdarstellung einer stetig differenzierbaren Kurve; die Abb. $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ sei bijektiv mit nirgends verschwindender Ableitung und $\varphi(c) = a, \ \varphi(d) = b$ und sei ebenfalls stetig differenzierbar, so daß $\tilde{c} := c \circ \varphi$ Darstellungen derselben Kurve sind. (Man nennt $\mathrm{Im}(c) = \mathrm{Im}(\tilde{c})$ auch die *Spur* der Kurve.)

Man zeige, daß das Längenintegral von der Parametrisierung unabhängig ist, daß also $\int_a^b \|c'(t)\| \, dt = \int_c^d \|\tilde{c}'(t)\| \, dt$.

---

[1] $\sum_{k=0}^{2N} \|c_{k+1} - c_k\| = \sum_{k=0}^{2N} \frac{\|c_{k+1} - c_k\|}{t_{k+1} - t_k} (t_{k+1} - t_k) \approx \sum_{k=0}^{2N} \|c'(t_k)\| (t_{k+1} - t_k)$; letzteres ist eine Riemann-Summe für das Längenintegral.

Aufgabe 3

a) Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ das Gebiet, das von dem geschlossenen Streckenzug
$$\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$$
berandet wird.

Man berechne $\int_G \left(x^2 y + y^2\right) dxdy$

b) freiwillige Zusatzaufgabe:
Sei $\mathfrak{G}_\varepsilon$ das quadratische Gitter mit Kantenlänge ε im $\mathbb{R}^2$, $U \subset \mathbb{R}^2$ der abgeschlossene Einheitskreis . Wir wissen: $\int_U \ dxdy = \pi$. Andererseits ist $\int_U \ dxdy = \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{\substack{Q \in \mathfrak{G}_\varepsilon \\ Q \cap U \neq \varnothing}} \varepsilon^2$.

(D.h. es wird für jedes Elementarquadrat des Gitters, welches den Kreis schneidet, ε^2 „dazugezählt“).

Versuchen Sie, mit dem Computer diese Summe für ein hinreichend kleines ε zu berechnen und auf diese Weise π zu approximieren.

Aufgabe 4

a) Versuchen Sie, durch eine geeignete Partialbruchzerlegung das Integral $\int_0^1 \frac{x^3+2x+1}{x^3+x^2+x+1} dx$ zu berechnen.

b) schwierige freiwillige Zusatzaufgabe: Berechnen Sie $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$
Hinweis: bei Integranden, die rationale Ausdrücke in Sinus und Cosinus sind, wende man grundsätzlich die Substitution $u = \tan \frac{x}{2}$ an[2] . Damit ist $x = 2 \arctan u$. Überlegen Sie zunächst, wieso $\sin x = \frac{2u}{1+u^2}$ und finden Sie einen entsprechenden Ausdruck für $\cos x$. Sie erhalten schließlich einen komplizierten rationalen Integranden, der mittels Partialbruch-zerlegung erledigt werden kann.

---

[2] $\tan x := \frac{\sin x}{\cos x}$