Mathematik II für Physiker und Elektrotechniker SS04
Aufgabenblatt 1

Integration stetiger Funkionen

Sei $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$, und $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ eine stetige Abbildung. Wir wollen die Fläche *A* unter dem Graphen von *f* berechnen. Dazu setzen wir für $N\in\mathbb{N}$ $\varepsilon:=\frac{b-a}{N}$ und zerlegen das Intervall [*a*,*b*] in *N* Teilintervalle $I_k=[a+(k-1)\varepsilon, a+k\varepsilon]$, $k=1\ldots N$. Auf jedem dieser Teilintervalle nimmt *f* einen minimalen Wert $f_k^{\min}$ und einen maximalen Wert $f_k^{\max}$ an. Damit haben wir offenbar

$$\sum_{i=1}^{N} f_k^{\min}\cdot\varepsilon \le A \le \sum_{i=1}^{N} f_k^{\max}\cdot\varepsilon$$

und aus der Stetigkeit von f kann man folgern – und dies ist auch anschaulich klar – daß

$\lim\limits_{N\to\infty}\left(\sum\limits_{i=1}^{N} f_k^{\max}\cdot\varepsilon\right)=A=\lim\limits_{N\to\infty}\left(\sum\limits_{i=1}^{N} f_k^{\max}\cdot\varepsilon\right)$, daß also *Untersummen* wie *Obersummen* die Fläche approximieren. Den Grenzwert der Unter- und Obersummen bezeichnen wir auch mit

$A=\int\limits_a^b f(x)dx$.

Aufgabe 1

Indem man den Grenzwert der Unter- und Obersummen bildet, berechne man das Integral

$$\int_0^1 x^2 dx\,.$$

Stammfunktion

Nun kann man natürlich auch für jeden Zwischenwert $x\in[a,b]$ das *Integral*

$F(x):=\int\limits_a^x f(t)dt$ berechnen. In der Vorlesung wurde gezeigt, daß *F* eine *Stammfunktion* von *f* ist, daß also *F'=f* gilt. Ist *G* eine Stammfunktion von *f*, so natürlich auch für jede Konstante $c\in\mathbb{R}$ die Funktion *G*+*c* ; grundsätzlich unterscheiden sich verschiedene Stammfunktionen um eine Konstante. Sind daher *G*,*H* Stammfunktionen von *f*, so folgt

$G(x)-G(a)=H(x)-H(a)$ und daher insbesondere $G(x)-G(a)=\int\limits_a^x f(t)dt$. Um ein Integral zu berechnen, müssen wir also nur eine Stammfunktion kennen. Zur Berechnung hilfreich sind die folgenden *Integrationsregeln*.

Summenregel: $\int\limits_a^b \left(f(x)+g(x)\right)dx=\int\limits_a^b f(x)dx+\int\limits_a^b g(x)dx$

Multiplikation mit Skalar: $\int\limits_a^b cf(x)dx=c\int\limits_a^b f(x)dx$

Intervallaufspaltung: Ist $a \le c \le b$, so ist $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

Aufgabe 2.

a) Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $x > 0$ setzen wir $x^\alpha := \exp\left(x \log \alpha\right)$. Man zeige durch Induktion, daß diese Definition für $\alpha = \pm n \in \mathbb{N}$ mit der üblichen Potenzdefinition übereinstimmt, und daß für $n \in \mathbb{N}$ $\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n = x$ gilt, so daß $x^{\frac{1}{n}}$ tatsächlich die „n-te Wurzel von *x*" ist. Sodann finde man für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von x^α und berechne damit das Integral $\int_1^2 x^\alpha dx$.

b) Man berechne $\int_1^9 \frac{\sqrt{x}+1}{x^2} dx$

Partielle Integration

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, und $u, v : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetige Abbildungen. Die Produktregel der Differentialrechnung einer Veränderlichen besagt, daß $(uv)' = u'v + v'u$. Daher ist

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = uv\Big|_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

wobei wir die Schreibweise $uv\Big|_a^b := u(b)v(b) - u(a)v(a)$ benutzen. Die Anwendung obiger Formel nennt man *partielle Integration*.

Aufgabe 2

Man berechne das Integral $\int_5^7 x^2 \exp(x)dx$

Substitutionsregel

Auch die Kettenregel der Differentialrechnung einer Veränderlicher führt zu einer Integrationsregel:

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $u : [c,d] \to [a,b]$ stetig differenzierbar, es sei $u(c) = a,\ u(d) = b$, weiterhin sei *F* eine Stammfunktion von *f*. Lt. Kettenregel gilt auf $\left]c,d\right[$ $\left(F \circ u\right)'(x) = f\left(u(x)\right)u'(x)$. Also haben wir

$$\int_c^d f\left(u(x)\right)u'(x)dx = \left(F \circ u\right)\Big|_c^d = F\left(u(d)\right) - F\left(u(c)\right) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(u)du .$$

Die Gleichung

$$\int_c^d f\left(u(x)\right)u'(x)dx = \int_a^b f(u)du$$

nennt man *Substitutionsregel*. Man beachte die verschiedenen Integrationsgrenzen!

Aufgabe 4

Mit Hilfe der Substitution $u(x) = 4 - x^2$ berechne man das Integral $\int_0^2 x\sqrt{4-x^2}\,dx$.