Definitionen und Aussagen zur Maßtheorie

Man möchte den Teilmengen eines Raumes ein “Gewicht” zuordnen. Wir werden sehen, daß dies in sinnvoller Weise häufig nicht für alle Teilmengen möglich ist, sondern daß man sich auf ein geeignetes Teilsystem von *meßbaren* Teilmengen beschränken muß:

Definition
Gegeben sei eine Menge M.
Eine $\sigma-$Algebra $\mathfrak{A}$ auf M ist eine Menge von Teilmengen von M mit folgenden Eigenschaften:

1. $\emptyset, M \in \mathfrak{A}$
2. $A, B \in \mathfrak{A} \rightarrow A-B \in \mathfrak{A}$ [1].
3. Ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Familie mit $\forall n\in\mathbb{N}: A_n \in \mathfrak{A}$, so gilt $\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \in \mathfrak{A}$.

Man nennt die Elemente von $\mathfrak{A}$ *meßbar (bezüglich $\mathfrak{A}$)*.
Man beachte die Analogie zur Definition einer Topologie auf M !
Eine Menge M zusammen mit einer $\sigma-$Algebra auf M nennt man auch einen *meßbaren Raum*, ähnlich wie eine Menge zusammen mit einer Topologie “topologischer Raum” heißt.

Beispiele für $\sigma-$Algebren :
M sei eine beliebige Menge.

1. Die Potenzmenge $\mathfrak{P}(M)$ ist eine $\sigma-$Algebra auf M.
2. $\{\emptyset, M\}$ ist eine $\sigma-$Algebra auf M.
3. Sind $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ $\sigma-$Algebren auf M, so auch $\mathfrak{A}\cap\mathfrak{B}$.
4. Ist $(\mathfrak{A}_i)_{i\in I}$ eine beliebige Familie von $\sigma-$Algebren auf M, so ist auch $\left(\bigcap_{i\in I} \mathfrak{A}_i\right)$ $\sigma-$Algebra auf M.
5. Die Menge der abzählbaren Teilmengen[2] von M ist eine $\sigma-$Algebra auf M.
6. Ist $\mathfrak{A}$ $\sigma-$Algebra auf M und A eine beliebige Teilmenge von M, so ist $\mathfrak{A}_A = \{A\cap B \mid B\in\mathfrak{A}\}$ eine $\sigma-$Algebra auf A.
7. Ist $\mathfrak{S}$ eine beliebige Menge von Teilmengen von M, so gibt es eine kleinste $\sigma-$Algebra $\mathfrak{A}$ auf M, die $\mathfrak{S}$ umfaßt, d.h $\mathfrak{S}\subset\mathfrak{A}$, und für jede andere $\sigma-$Algebra $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{S}\subset\mathfrak{B}$ gilt: $\mathfrak{A}\subset\mathfrak{B}$. Man nennt $\mathfrak{A}$ die “von $\mathfrak{S}$ erzeugte” $\sigma-$Algebra. Die von $\mathfrak{S}$ erzeugte $\sigma-$Algebra entsteht als Durchschnitt aller $\sigma-$Algebren, welche $\mathfrak{S}$ umfassen, eine nach Punkt 4. legitime Konstruktion.

   Die in diesem Sinne von einer Topologie $\mathcal{O}$ auf M erzeugte $\sigma-$Algebra ist besonders wichtig, insbesondere, wenn es um die Topologie der üblichen offenen Mengen auf dem $\mathbb{R}^n$ geht.
   Die von den offenen Mengen des $\mathbb{R}^n$ erzeugte $\sigma-$Algebra heißt *Borelsche* $\sigma-$Algebra.

---

1 $A-B = \{x\in M \mid x\in A \wedge x\notin B\}$

2 Eine Menge K heißt *abzählbar*, wenn eine surjektive Abbildung $\mathbb{N}\rightarrow K$ existiert. Damit sind natürlich auch endliche Mengen abzählbar. Ist die Menge K abzählbar und unendlich, so gibt es sogar eine bijektive solche Abb.

Ein *Maß* auf einer $\sigma-$Algebra ordnet den meßbaren Mengen eine nicht-negative Zahl zu, wobei wir ∞ als Wert zulassen[3]:

Definition
Gegeben sei eine $\sigma-$Algebra $\mathfrak{A}$ auf einer Menge M. Ein *Maß* auf M (bzgl. $\mathfrak{A}$) ist eine Abbildung $\mu: \mathfrak{A} \to \bar{\mathbb{R}}_+$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $\mu(\emptyset)=0$
2. Ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare Familie paarweise disjunkter meßbarer Mengen, gilt also $A_m \cap A_n = \emptyset$ für $m \neq n$, so ist $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)=\sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n)$ ($\sigma-$Additivität)

Eine Menge *M* zusammen mit einer $\sigma-$Algebra und einem Maß nennt man auch einen *Maßraum.*

Ist μ ein Maß auf *M* und sind *A,B* meßbar mit $A \subset B$ so wurde in der Vorlesung gezeigt, daß $\mu(A) \leqslant \mu(B)$. Man zeigt auch leicht, daß für eine beliebige, nicht notwendigerweise paarweise disjunkte Familie meßbarer Mengen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt: $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n)$. (Subadditivität).

Beispiele für Maße:
1. Wenn alle Elemente einer $\sigma-$Algebra das Maß 0 erhalten, hat man das sog. "Nullmaß".
2. Ist $\mathfrak{A}$ eine $\sigma-$Algebra auf *M* und setzen wir für eine Menge $A \in \mathfrak{A}$ $\mu(A)$ gleich der Elementezahl von *A*, so erhalten wir das sogenannte "abzählende Maß" auf $\mathfrak{A}$.
3. Das für uns zunächst wichtigste Maß wird das sogenannte **Lebesgue-Maß** λ auf dem $\mathbb{R}^n$. Dabei soll das Maß eines n-dimensionalen Quaders das Produkt seiner Seitenlängen sein, und die Maße von zwei durch eine Parallelverschiebung hervorgegangenen Mengen sollen gleich sein. Vorläufig ist noch unklar, welches die natürlichste $\sigma-$Algebra ist, auf der wir das Lebesgue-Maß definieren können. Die folgende Konstruktion wird zeigen, daß keinesfalls jede Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ lebesgue-meßbar sein kann, womit gleichzeitig klar wird, daß man ohne den Begriff der $\sigma-$Algebra nicht auskommt, um die Lebesgue-meßbaren Mengen im $\mathbb{R}^n$ zu beschreiben.

Konstruktion einer nicht Lebesgue-meßbaren Menge
Wir betrachten die Menge $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ der rationalen Zahlen. Wir führen eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}$ ein: $x \sim y$ gdw $x-y \in \mathbb{Q}$. Für $x \in \mathbb{R}$ besteht betrachten wir die Äquivalenzklasse $\bar{x}=\{y \in \mathbb{R} | x-y \in \mathbb{Q}\}$. Aus jeder Äquivalenzklasse wählen wir genau ein Element *x* aus, welches in [0,1] liegt. Dies ist möglich, denn hätte man zunächst ein anderes ausgewählt, welches beispielsweise in [4,5] liegt, so würden man durch Subtraktion von 4 ein äquivalentes erhalten, welches in [0,1] liegt. Wir fassen all diese ausgewählten Elemente in der Menge $V \subset [0,1]$ zusammen: diese Menge wird sich als nicht Lebesgue-meßbar erweisen. Definitionsgemäß sind zwei verschieden Elemente von *V* nicht äquivalent zueinander, d.h. ihre Differenz ist keine rationale Zahl.
Weil die rationalen Zahlen im Intervall [-1,1] abzählbar sind, gibt es eine Folge $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ paarweise verschieder rationaler Zahlen, in der alle rationalen Zahlen im Intervall [-1,1] vorkommen. Wir setzen für $n \in \mathbb{N}$ $V_n = r_n + V = \{r_n + x | x \in V\}$. Die Mengen V_n entstehen also durch eine einfache Verschiebung von V. Wenn man der Menge *V* einen Inhalt $\lambda(V)$ zuordnen kann,

3 Rechnen mit ∞ : $a+\infty=\infty+a=\infty, \infty+\infty=\infty, a \leqslant \infty, \infty \leqslant \infty$

dann natürlicherweise auch den V_n und es sollte offenbar $\lambda(V)=\lambda(V_n)$ gelten. Offenbar gilt für alle $n\in\mathbb{N}$: $V_n\subset[-1,2]$. Schließlich gilt für $n\neq m$: $V_n\cap V_m=\emptyset$, denn ein Element $y\in V_n\cap V_m$ hätte die Eigenschaft $y=x+r_n$ und $y=z+r_m$ mit zwei verschiedenen Elementen $x,z\in V$. Dann wäre aber $x-z\in\mathbb{Q}$, d.h. x und z lägen in derselben Äquivalenzklasse. V war aber gerade so konstruiert , daß verschiedene Elemente in verschiedenen Äquivalenzklassen liegen.
Also ist die Familie $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine disjunkte Familie von Mengen. Wäre V und damit alle Mengen V_n meßbar, so hätten wir $\lambda\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda(V_n)$. Außerdem ist $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n\subset[-1,2]$, so daß $\lambda\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n\right)\leqslant 3$. Weil $V\subset[0,1]$ folgt auch $\lambda(V)\leqslant 1$.
Jedes Element $y\in[0,1]$ ist äquivalent zu einem $x\in V$, d.h. $y-x\in\mathbb{Q}$ mit $-1\leqslant x-y\leqslant 1$ und es gibt daher ein $n\in\mathbb{N}$ mit $y-x=r_n$ und daher $y\in V_n$. Also hat man insgesamt $[0,1]\subset\bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n\subset[-1,2]$.

Damit folgt $1=\lambda([0,1])\leqslant\lambda\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda(V_n)\leqslant\lambda[-1,2]=3$.

Jetzt führt sowohl die Annahme, daß $\lambda(V)=\lambda(V_n)=0$ wie auch die Annahme, daß $\lambda(V)=\lambda(V_n)>0$ zum Widerspruch, denn im ersten Fall ergäbe sich $1\leqslant 0$ und im zweiten $\infty\leqslant 3$.

Unsere einzigen Annahmen waren aber gewesen, daß jede Teilmenge von $\mathbb{R}$ und insbesondere V meßbar ist, und daß parallelverschobene Mengen dasselbe Maß besitzen sollen. Es ergibt sich, daß V nicht lebesgue-meßbar sein kann.
Es ist übrigens kein einfacherer und auch kein "konstruktiver" Beweis für diese Tatsache bekannt. Im Beweis wird vom sog. **Auswahlaxiom** Gebrauch gemacht, und zwar als aus jeder Äquivalenzklasse ein Element ausgewählt wurde. Daß so etwas bei einer überabzählbaren Menge von Äquivalenzklassen möglich ist, bedarf eben dieses Axioms, welches in anderer Fassung so lautet:

Auswahlaxiom
Sei $(A_i)_{i\in I}$ eine Familie nicht-leerer Mengen.
Dann ist die Menge $\underset{i\in I}{X} A_i:=\left\{f:I\to\bigcup_{i\in I} A_i \mid \forall i\in I: f(i)\in A_i\right\}$ nicht leer.

Eine Funktion $f:I\to\bigcup_{i\in I} A_i$ mit $\forall i\in I: f(i)\in A_i$ trifft ja für jedes $i\in I$ eine Auswahl $f(i)\in A_i$. Daß es solche Funktionen immer gibt, ist keinesfalls selbstverständlich und nur durch ein gesondertes mengentheoretisches Axiom begründbar. Für endliche oder abzählbare Indexmengen kann man so eine "Auswahlfunktion" auch ohne dieses Axiom konstruieren, explizit oder induktiv.

Noch zur Illustration: Machen Sie sich klar, daß für $I=\{1,2\}$, $A_1=A,\ A_2=B$ die Menge $\underset{i\in I}{X} A_i$ offenbar dasselbe ist wie $A\times B$, und für $I=\{1,2,3\}$ und $A_i=\mathbb{R}$ die Menge $\underset{i\in I}{X} A_i$ dasselbe ist wie $\mathbb{R}^3$. Bei der Menge $\underset{i\in I}{X} A_i$ handelt es sich also um ein allgemeines "cartesisches Produkt" von Mengen, und das Auswahlaxiom besagt, daß es nicht leer ist, wenn keiner der "Faktoren" leer ist.

Meßbare Funktionen und Integrale

Wir gehen aus von zwei meßbaren Räumen $(M,\mathfrak{A}),\ (N,\mathfrak{B})$. Eine Abbildung $f:M\to N$ heißt *meßbar*, wenn $\forall B\in\mathfrak{B}: f^{-1}(B)\in\mathfrak{A}$.

Beachten Sie die Analogie zu stetigen Abbildungen:
Sind $(M,\mathcal{O}_M),\ (N,\mathcal{O}_N)$ topologische Räume, so ist eine Abbildung $f:M\to N$ genau dann stetig, wenn $\forall V\in\mathcal{O}_N: f^{-1}(V)\in\mathcal{O}_M$.

Uns interessieren insbesondere meßbare Funktionen $f:M\to\overline{\mathbb{R}}$, die wir später auch integrieren möchten. Eine Funktion $f:M\to\overline{\mathbb{R}}$ ist meßbar, wenn die Urbildmengen von Intervallen[4] meßbar in *M* sind. Offenbar sind dann auch die Urbildmengen halboffener oder abgeschlossener Intervalle meßbar.

Ist $A\subset M$ eine meßbare Menge, also $A\in\mathfrak{A}$, so ist die *charaktistische Funktion* $\chi_A: M\to\mathbb{R}$, welche definiert ist durch $\chi_A(x)=1 \text{ für } x\in A$, $\chi_A(x)=0 \text{ für } x\notin A$ meßbar. (Wieso?)

Sei nun zu dem meßbaren Raum $(M,\mathfrak{A})$ ein Maß μ gegeben, also $(M,\mathfrak{A},\mu)$ ein Maßraum, so setzen wir

$$\int_M \chi_A \,\mathrm{d}\mu=\mu(A)$$

Eine *Treppenfunktion* ist nun einfach eine endliche oder abzählbare Linearkombination charakteristischer Funktionen: Ist eine abzählbare Familie $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ paarweise disjunkter meßbarer Mengen gegeben, sowie eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\overline{\mathbb{R}}$, so ist definitionsgemäß

$f:=\sum_{i=1}^{n} x_i\chi_{A_i}$ eine Treppenfunktion. Sind die x_n sämtlich nicht-negativ, so setzt man

$$\int_M f\,\mathrm{d}\mu=\sum_{i=1}^{\infty} x_i\mu(A_i) \quad .$$

Da wir jetzt nicht-negative Treppenfunktionen integrieren können, werden wir allgemeinere nicht-negative Funktionen durch Treppenfunktionen approximieren und ihr Integral als Grenzwert der Integrale der Treppenfunktionen ergibt.

Sei daher $f:M\to\mathbb{R}$ eine meßbare Funktion mit nicht-negativen Werten. Zu einer natürlichen Zahl $n\in\mathbb{N}$ betrachten wir die Zerlegung von $\mathbb{R}_+$ in die Intervalle $I_k=[\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}[$, $k\in\mathbb{N}_0$.
Weil *f* meßbar ist, sind die Urbildmengen $A_k=f^{-1}(I_k)$ sämtlich meßbar und paarweise disjunkt, da dies ja auch für die I_k selbst gilt. Man setze nun für $k\in\mathbb{N}_0$ $x_k=\frac{k}{2^n}$ und bilde die

4 Intervalle in $\overline{\mathbb{R}}$ sind neben offenen, abgeschlossenen und halboffenen Intervallen in $\mathbb{R}$ die Mengen $[-\infty,a],[-\infty a[,]a,\infty],[a,\infty],[-\infty,\infty]$ mit $a\in\mathbb{R}$.

Treppenfunktion $f_n = \sum_{i=0}^{\infty} x_i \chi_{A_i}$.

Machen Sie sich klar, daß für $n > m$ $f_m \leqslant f_n \leqslant f$ [5] und $\forall x \in M, n \in \mathbb{N}: f(x) - f_n(x) \leqslant \frac{1}{2^n}$.
Die Treppenfunktionen (f_n) approximieren also die gegebene Funktion *f*, für jedes $x \in M$ ist $f_n(x)$ eine monoton steigende Folge mit Grenzwert $f(x)$!

Man setzt nun einfach

$$\int_M f \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n \to \infty} \int_M f_n \mathrm{d}\mu$$

Auch bei den Integralen rechts vom Gleichheitszeichen handelt es sich ja um eine monoton steigende Folge positiver Zahlen, die jedenfalls konvergiert, "schlimmstenfalls" mit dem Wert ∞ .

Bemerkung:
Das Integral einer nichtnegativen meßbaren Funktion $f: M \to \overline{\mathbb{R}}$ ergibt sich ganz ähnlich: Man hätte lediglich $I_\infty = \{\infty\}$, $A_\infty = f^{-1}(\{\infty\})$, $x_\infty = \infty$ gesetzt und sämtlichen approximierenden Treppenfunktionen f_n noch den Summanden $x_\infty \chi_{A_\infty}$ hinzugefügt.

Um Integrale beliebiger meßbarer Funktionen $f: M \to \overline{\mathbb{R}}$ zu definieren, zerlegen wir eine solche Funktion in einen positiven und einen negativen Anteil, d.h wir setzen $f^+ = \max\{0, f\}$ und $f^- = \max\{0, -f\}$. Offenbar gilt jetzt: $f = f^+ - f^-$ und $|f| = f^+ + f^-$. Die Funktionen $|f|, f^+, f^-$ sind alle nicht-negativ und meßbar . Man nennt *f* **integrabel** , wenn

$$\|f\| = \int_M |f| \mathrm{d}\mu < \infty$$

Nullmengen
Eine Teilmenge $N \subset M$ heißt Nullmenge, wenn es eine meßbare Menge $K \in \mathfrak{A}$ gibt mit $\mu(K) = 0$ und $N \subset K$.

Man sagt, eine Aussage sei ***fast überall*** gültig, wenn sie außerhalb einer Nullmenge gilt.
Wir wollen im folgenden Funktionen, die fast überall übereinstimmen, identifizieren.

Eine integrable Funktion, für die $\|f\| = \int_M |f| \mathrm{d}\mu = 0$ gilt, kann sich nur auf einer Nullmenge von der Nullfunktion unterscheiden, ist also mit ihr zu identifizieren. In diesem Sinne läßt sich also sagen: Aus $\|f\| = 0$ folgt $f = 0$. Ebenso kann eine integrable Funktion auch nur auf einer Nullmenge den Wert ∞ annehmen, sondst müßte das Integral über den Betrag der Funktion ja ∞ sein.

Der Raum $L^1_{\mathbb{R}}(M, \mu)$

Definiert man nun den Raum der auf *M* integrablen reellwertigen Funktionen durch
$L^1_{\mathbb{R}}(M, \mu) = \left\{ f: M \to \mathbb{R} \,\middle|\, f \text{ meßbar und } \int_M |f| \mathrm{d}\mu < \infty \right\}$
so sind entsprechend obigen Bemerkungen Elemente zu identifizieren, die fast überall übereinstimmen.

5 Wir schreiben $f \leqslant g$, wenn $\forall x \in M: f(x) \leqslant g(x)$

Für $f \in L^1_{\mathbb{R}}(M, \mu)$ wird durch $\|f\| = \int_M |f| \,\mathrm{d}\mu$ eine Norm definiert, die sog. L^1-Norm .

Ganz wesentlich ist nun, daß der Raum $L^1_{\mathbb{R}}(M, \mu)$ vollständig bezüglich der durch diese Norm gegebenen Metrik ist.

Wie in jedem normierten Vektorraum gilt für eine Funktionenfolge (f_n) , die bezüglich der L^1-Norm gegen eine Funktion $f \in L^1_{\mathbb{R}}(M, \mu)$ konvergiert, daß die Zahlenfolge $\|f - f_n\| = \int_M |f_n - f| \,\mathrm{d}\mu$ eine Nullfolge ist. Man kann aber auch zeigen, daß dann die Folgen reller Zahlen $(f_n(x))$ fast überall den Grenzwert $f(x)$ besitzen.

Umgekehrt besagt der sog. **Satz von der beschränkten Konvergenz**, daß für eine Folge integrabler Funktionen (f_n) , deren Funktionswertfolgen $f_n(x)$ für fast alle $x \in M$ konvergieren mit Grenzwert $f(x)$ die Grenzfunktion f integrierbar ist mit

$$\int_M f(x) \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n=\infty} \int_M f_n \,\mathrm{d}\mu$$

Dazu ist aber noch folgende Beschränktheitsvoraussetzung notwendig: es muß eine nicht-negative integrierbare Funktion g existieren, so daß $\forall n \in \mathbb{N} : |f_n(x)| \leqslant g(x)$ für fast alle $x \in M$.

All diese Aussagen und Begriffe lassen sich leicht auf komplexwertige Funktionen ausdehnen. Eine Funktion $f : M \to \mathbb{C}$ heißt integrierbar, wenn Realteil und Imaginärteil integrierbar sind. In diesem Fall setzt man $\int_M f \,\mathrm{d}\mu = \int_M \Re(f) \,\mathrm{d}\mu + i \int_M \Im(f) \,\mathrm{d}\mu$ und $\|f\| = \|\Re(f)\| + \|\Im(f)\|$, und nennt den entsprechenden Raum der bis auf eine Nullmenge bestimmten integrierbaren komplexwertigen Funktionen $L^1_{\mathbb{C}}(M, \mu)$.

Beispiele
Es ist an dieser Stelle vielleicht instruktiv, folgendes Beispiel zu betrachten:
$M = \{1,2\},\ \mathfrak{A} = \mathfrak{P}(M) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\{1,2\}\}$ und μ sei das Maß, welches jeder Menge in $\mathfrak{A}$ ihre Elementezahl zuordnet. Alle reellwertigen Funktionen auf M sind integrierbar. Die einzige Nullmenge ist die leere Menge. Offenbar gibt es eine bijektive Abbildung $L^1_{\mathbb{R}}(M, \mu) \to \mathbb{R}^2$, die durch $f \to (f(1), f(2))$ gegeben ist. Offenbar ist auch $\int_M f \,\mathrm{d}\mu = f(1) + f(2)$ und $\|f\| = |f(1)| + |f(2)|$. Das bedeutet, daß $\mathbb{R}^2$ und dieser $L^1_{\mathbb{R}}(M, \mu)$ eigentlich identisch sind. Wir erinnern uns, daß wir die Summe der Beträge der Komponenten eines Vektors schon früher als “1-Norm” auf $\mathbb{R}^2$ kennengelernt hatten.

Genauso erhält man den $\mathbb{R}^n$ mit der 1-Norm als Raum der integrablen Funktionen über einer n-elementigen Menge.

Ein bischen komplizierter wird es, wenn wir nicht von 2-elementigen oder n-elementigen Maß-räumen ausgehen, sondern einem abzählbaren: Wählt man $M = \mathbb{N}$, $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}(M)$ und als Maß wie schon oben das “abzählende Maß”. Wiederum ist die leere Menge die einzige Nullmenge. Das Integral einer nichtnegativen Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ist jetzt $\int_M f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{i=0}^{\infty} |f(i)|$. Die Funktion f kann man offenbar mit der durch $a_i = f(i)$ gegebenen Folge (a_i) identifizieren, so daß der Raum der integrierbaren Funktionen jetzt gerade aus allen Folgen besteht, für die $\sum_{i=0}^{\infty} |a_i| < \infty$.

Der Satz von der beschränkten Konvergenz sieht in diesem Kontext so aus:

Die Funktionenfolge (f_n) wird zu einer Folge von Folgen $((a_m)_n)$, also einer "Doppelfolge" $(a_{m,n})$. Die weiteren Voraussetzungen des Satzes sehen hier jetzt so aus, daß für jedes $m \in \mathbb{N}$ die Grenzwerte $\lim_{n\to\infty} a_{m,n} := a_m$ existieren, und daß noch eine nichtnegative Folge (b_n) existiert mit $\sum_{i=0}^{\infty} b_i < \infty$ und $\forall\, n, m \in \mathbb{N} : |a_{m,n}| \leqslant b_m$.

Unter diesen Voraussetzungen gilt $\sum_{m=1}^{\infty} a_m = \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n}$.

Dies läßt sich schematisch so veranschaulichen:

Wenn

$$
\begin{array}{cccccccc}
|a_{11}| & |a_{12}| & |a_{13}| & \cdots & |a_{1k}| & \cdots & \leqslant & b_1 \\
|a_{21}| & |a_{22}| & |a_{23}| & \cdots & |a_{2k}| & \cdots & \leqslant & b_2 \\
|a_{31}| & |a_{32}| & |a_{33}| & \cdots & |a_{3k}| & \cdots & \leqslant & b_k \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\
|a_{k1}| & |a_{k2}| & |a_{k3}| & \cdots & |a_{kk}| & \cdots & \leqslant & b_k \\
& & & & & & & \\
\sum_{i=1}^{\infty} |a_{i1}| < \infty & \sum_{i=1}^{\infty} |a_{i1}| < \infty & \sum_{i=1}^{\infty} |a_{i3}| < \infty & & \sum_{i=1}^{\infty} |a_{ik}| < \infty & & & \sum_{i=1}^{\infty} b_i < \infty
\end{array}
$$

und

$$
\begin{array}{cccccccc}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1k} & \cdots & \to & a_1 \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2k} & \cdots & \to & a_2 \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3k} & \cdots & \to & a_3 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\
a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \cdots & a_{kk} & \cdots & \to & a_k \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & & \vdots
\end{array}
$$

dann $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| < \infty$ und

$$
\begin{array}{cccccccc}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1k} & \cdots & & a_1 \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2k} & \cdots & & a_2 \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3k} & \cdots & & a_3 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\
a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \cdots & a_{kk} & \cdots & & a_k \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\
\sum_{i=1}^{\infty} a_{i1} & \sum_{i=1}^{\infty} a_{i2} & \sum_{i=1}^{\infty} a_{i3} & \cdots & \sum_{i=1}^{\infty} a_{ik} & \cdots & \to & \sum_{i=1}^{\infty} a_i
\end{array}
$$