Mathematik III für Physiker und Elektrotechniker WS04/05
Aufgabenblatt 13

Name(n)	*Tutor*	*Datum*

Wir kennen inzwischen den Begriff einer auf einem Gebiet $G\subset\mathbb{C}$ definierten holomorphen Funktion. Summen und Produkte holomorpher Funktionen sind holomorph, während ein Quotient $f=\frac{g}{h}$ holomorpher Funktionen an den Nullstellen des Nenners i.a. nicht definiert ist bzw. den Wert ∞ hat. Man schreibt $\overline{\mathbb{C}}:=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ und definiert auf $\overline{\mathbb{C}}$ sogar eine Topologie, indem man zu den offenen Teilmengen von $\mathbb{C}$ als offene Umgebungen von ∞ die Mengen $\overline{\mathbb{C}}-K$ hinzu-nimmt, wobei $K\subset\mathbb{C}$ beschränkt und abgeschlossen. Man nennt nun eine Abbildung $f:G\to\overline{\mathbb{C}}$ ***meromorph***, wenn zu jedem $z_0\in G$ eine offene Umgebung $U(z_0)$ und eine Zahl $n\in\mathbb{Z}$ existiert, so daß $\frac{f}{(z-z_0)^n}$ holomorph in $U(z_0)$ ist. Ist *f* nicht die Nullfunktion, so gibt es unter den möglichen Zahlen $n\in\mathbb{Z}$ zu einem gegebenen $z_0\in G$ jeweils eine größte, die wir mit $\operatorname{ord}(f,z_0)$ bezeichnen. Ist $\operatorname{ord}(f,z_0)$ negativ, so ist *f* selbst schon holomorph und besitzt in z_0 eine ***Nullstelle n-ter Ordnung***. Ist sie positiv, so besitzt *f* in z_0 eine ***Polstelle n-ter Ordnung***. Der Fall $\operatorname{ord}(f,z_0)=0$ ist der Normalfall für fast alle $z_0\in G$: Nullstellen und Polstellen einer meromorphen Funktion besitzen innerhalb *G* keine Häufungspunkte. Meromorphe Funktionen kann man addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividieren, solange der Nenner nicht die Nullfunktion ist: die Ergebnisse bleiben meromorph.Holomorphe Funktionen sind natürlich auch meromorph, sie besitzen keine Polstellen. Die Menge $\mathcal{M}(G)=\{f:G\to\overline{\mathbb{C}} \mid f \text{ ist meromorph}\}$ bildet in natürlicher Weise einen Körper mit der Nullfunktion als Nullelement und der Funktion $f\equiv 1$ als Einselement. Wir haben es im Folgenden meist mit dem "Funktionenkörper" $\mathcal{M}(\mathbb{C})$ zu tun.

Beispiele:
Die Funktion $f(z)=z$ ist in ganz $\mathbb{C}$ holomorph und besitzt in $z_0=0$ eine Nullstelle erster Ordnung. Die Funktion $f(z)=(z-1)=z^2-2z+1$ ist in ganz $\mathbb{C}$ holomorph und besitzt in $z_0=1$ eine Nullstelle 2. Ordnung. Die Funktion $f(z)=\frac{z}{(z-1)^2}$ ist meromorph in $\mathbb{C}$ und besitzt in $z_0=0$ eine Nullstelle 1. Ordnung und in $z_1=1$ eine Polstelle 2. Ordnung. Für alle übrigen $z\in\mathbb{C}$ gilt in diesem Beispiel $\operatorname{ord}(f,z)=0$.

Aufgabe 1
a) Bestimmen Sie alle Null- und Polstellen und deren Ordnung für die meromorphen Funktionen

$$f(z)=\frac{z^3-5z^2+8z-4}{z^2-5z+6}\quad,\quad g(z)=\tan z=\frac{\sin z}{\cos z}\quad.$$

b) $f(z)=\exp(\frac{1}{z})$ ist holomorph in $\mathbb{C}-\{0\}$. Zeigen Sie, daß für jedes $z\neq 0:\operatorname{ord}(f,z)=0$.
Zeigen Sie außerdem, daß *f* nicht meromorph in $\mathbb{C}$ ist. (Die Singularität in 0 ist kein Pol!)

Ist $G\subset\mathbb{C}$ ein Gebiet und f holomorph in G, so hat man für jedes $z_0\in G$ die Potenzreihenentwicklung (Taylorreihe) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$. Ist f meromorph in G mit einem Pol k-ter Ordnung in $z_0\in G$, so ist nach obiger Definition $g=\frac{f}{(z-z_0)^{-k}}=(z-z_0)^k\cdot f$ holomorph und besitzt daher eine Reihendarstellung $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$. Daher besitzt f die Reihendarstellung

$f(z)=\sum_{n=-k}^{\infty}a_{n+k}(z-z_0)^n=\sum_{n=-k}^{\infty}b_n(z-z_0)^n$. Diese Reihe nennt man ***Laurentreihe*** von f in z_0, $\sum_{n=-k}^{-1}b_n(z-z_0)^n$ nennt man den ***Hauptteil*** der Laurentreihe und den Koeffizienten $\boldsymbol{b_{-1}}$ nennt man das ***Residuum*** von f in z_0, $\mathbf{Res}(\boldsymbol{f},\boldsymbol{z_0})$.

Offenbar verschwindet der Hauptteil der Laurentreihe und damit auch das Residuum in jedem Punkt, in dem f holomorph ist, also keinen Pol besitzt. Die Funktion $f(z)=z+\frac{1}{z}$ besitzt in $z_0=0$ die Laurentreihe $z^{-1}+z$ mit Hauptteil z^{-1} und Residuum 1. Dagegen ist offenbar das Residuum von $g(z)=\frac{1}{(z-1)^2}$ in $z_0=1$ gleich Null.

Aufgabe 2

a) Man bestimme das Residuum von $f(z)=\frac{z^2-3z+2}{z^3+4z^2+5z+2}$ in allen Polen von f.

b) Man bestimme das Residuum von $f(z)=\frac{1}{\sin z}$ in allen Polen von f.

Die Bedeutung des Residuums liegt in folgender Verallgemeinerung des Cauchyschen Integralsatzes:

Residuensatz:
f sei meromorph in einem Gebiet $G'\subset\mathbb{C}$, G ein Gebiet mit glattem Rand innerhalb G', d.h. der Rand ∂G von G wird durch eine stetig differenzierbare Kurve parametrisiert . f besitze keine Polstellen auf ∂G und $z_1,\dots,z_n$ seien sämtliche Polstellen von f innerhalb G. Dann ist

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G}f(z)\,\mathrm{d}z=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Res}(f,z_i)$$

Aufgabe 3

a) Inwiefern folgt der Cauchysche Integralsatz aus dem Residuensatz?
b) Inwiefern folgt die Cauchysche Integralformel aus dem Residuensatz?
c) Die Kurve γ beschreibe den Rand des Kreises um 0 mit Radius 2. Berechnen Sie mit Hilfe des Residuensatzes $\int_{\gamma}\frac{\mathrm{d}z}{z^2+1}$

Hinweis zu b): Ist f in G holomorph und $z_0\in G$, so ist $g(z)=\frac{f(z)}{z-z_0}$ meromorph. Wenden Sie den Residuensatz auf g an.