Mathematik III für Physiker und Elektrotechniker WS04/05
Aufgabenblatt 11

Name(n)	*Tutor*	*Datum*

Aufgabe 1

a) Zeigen Sie: für die Ableitungsoperatoren $\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right), \frac{\partial}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)$ gilt die Produktregel , d.h. man betrachte in $\mathbb{C}$ definierte komplexwertige Funktionen f, g und ihr komplexwertiges Produkt *fg* und soll nun durch Zerlegen von $f=f_1+if_2$, $g=g_1+ig_2$ und die Produktregel für die partiellen Ableitungen reellwertiger Funktionen die Gleichungen $\frac{\partial fg}{\partial z}=g\frac{\partial f}{\partial z}+f\frac{\partial g}{\partial z}, \frac{\partial fg}{\partial \bar{z}}=g\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}+f\frac{\partial g}{\partial \bar{z}}$ brutal nachrechnen.

b) Warum ist die Funktion $f(z)=z|z|=z^2\bar{z}$ reell, aber nicht komplex differenzierbar?
Berechnen Sie $\mathrm{d}f=\frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z+\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\mathrm{d}\bar{z}$!

Aufgabe 2

Zeigen Sie: $f_1(x,y)=x^3-2x^2-3xy^2+2y^2+1$ ist harmonisch!
Um eine holomorphe Funktion *f* zu erhalten, deren Realteil f_1 ist, fehlt noch der Imaginärteil f_2 . Bestimmen Sie zunächst $\alpha=\mathrm{d}f_2=\frac{\partial f_2}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f_2}{\partial y}\mathrm{d}y$ über die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen und berechnen dann $f_2(x,y):=\int_\gamma \alpha$, wobei γ die gerade Strecke vom Nullpunkt zum Punkt (*x*, *y*) sei. (Sie könnten den Nullpunkt auch durch jeden anderen festen Punkt ersetzen und die gerade Strecke durch jede andere Kurve zwischen dem gewählten festen Punkt und (*x*, *y*).

Zeigen Sie: f_2 ist ebenfalls harmonisch!
(Inwieweit ist f_2 eindeutig bestimmt?)

Sie haben jetzt $f=f_1+if_2$ als Funktion von *x,y* . Drücken Sie nun *f* als Funktion von $z, \bar{z}$ aus, indem Sie die Gleichungen $x=\frac{1}{2}(z+\bar{z}),\ y=\frac{1}{2i}(z-\bar{z})$ benutzen, Da Sie *f* so konstruiert haben, daß die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen gelten, sollten die $\bar{z}$ - Terme wegfallen und sich eine hübsche Funktion von *z* ergeben. (Von dieser bin ich bei der Konstruktion von f_1 ausgegangen!)