Mathematik III für Physiker und Elektrotechniker WS04/05
Aufgabenblatt 11

Name(n)	Tutor	Datum

Aufgabe 1
Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit einem Skalarprodukt <,> ,
$V' = \{\lambda \mid \lambda : V \to \mathbb{R} \text{ linear}\}$ sei der "Dualraum" von V. Zwar ist auch V' n-dimensional, aber erst mit Hilfe eines Skalarprodukts läßt sich eine "natürliche" Abbildung $V \to V'$ definieren, indem man setzt: $x \to (y \to <x, y>)$, mit anderen Worten: man definiert eine lineare Abbildung $\Phi : V \to V'$ durch $(\Phi(x))(y) = <x, y>$.

Zeigen Sie, daß diese Abbildung $\Phi : V \to V'$ bijektiv ist.

Aufgabe 2
Sei $\gamma(t) = \exp(it) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ die übliche Parametrisierung des Einheitskreises in $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$.
Berechnen Sie das komplexe Kurvenintegral $\int_\gamma z^2 \,\mathrm{d}z$ zunächst direkt und dann über eine Riemann Summe $\sum_{i=1}^{n} \gamma(t_i)^2 (\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})) = \sum_{i=0}^{n} \exp(2 i t_i)(\exp(t_i) - \exp(t_{i-1}))$ [1].
Machen Sie sich ein anschauliches Bild der Situation, indem Sie für n=10 die Vektoren $\exp(2 i t_i)(\exp(t_i) - \exp(t_{i-1}))$ konkret hinzeichnen und das Ergebnis als geometrisch selbstverständlich interpretieren.

Aufgabe 3
Sei γ der geschlossene Streckenzug durch die Punkte 0, 2+i ,1+2i. Berechnen Sie $\int_\gamma z \,\mathrm{d}z$.

Aufgabe 4
a) Stellen Sie die Funktion $f(z) = \frac{1}{z}$ durch eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - (1+i))^n$ dar und berechnen Sie deren Konvergenzradius. Was fällt auf?

b) Bilden Sie das komplexe Kurvenintegral $\int_\gamma f(z) \,\mathrm{d}z$, wobei γ wieder den Einheitskreis durchläuft. Das Ergebnis unterscheidet sich von dem in Aufg. 2,3. Was ist anders an der geometrischen Situation?

---

1 $(\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})) \approx \gamma'(t_i)(t_i - t_{i-1})$