Mathematik III für Physiker und Elektrotechniker WS04/05 **Aufgabenblatt 10**		
Name(n)	***Tutor***	***Datum***

Aufgabe 1

Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen und $\Phi : U \to \mathbb{R}^3$, $\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{pmatrix}$ eine orientierungserhaltende Parametrisierung einer orientierbaren Fläche F im $\mathbb{R}^3$ mit Volumenform ω . Bezeichnen wir die Koordinaten im $\mathbb{R}^2$ mit u,v, so bilden die Vektoren $\partial_u \Phi \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{\partial \Phi}{\partial u} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, $\partial_v \Phi \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{\partial \Phi}{\partial v} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ bekanntlich eine Basis des Tangentialraums $T_p F$, $p = \Phi \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$.

Man kann generell zeigen, daß $\Phi^* \omega = \| \partial_u \Phi \times \partial_v \Phi \| \, \mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v$, was dann offenbar nützlich ist bei der Volumenberechnung einer Fläche mitttels: $\int_F \omega = \int_S \Phi^* \omega$

Zeigen sie die Gültigkeit der Formel $\Phi^* \omega = \| \partial_u \Phi \times \partial_v \Phi \| \, \mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v$ für die stereographische und die Mercator-Projektion der Sphäre S^2 . In diesem Fall ist Ihnen ja die Volumenform $\omega = x \, \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y \, \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + z \, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ bekannt.

Aufgabe 2

Betrachten Sie die $2z = x^2 + y^2$ und $z \leqslant 2$ gegebene paraboloide Schale S , eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand, und darauf die 1-Form $\omega = 3y \, \mathrm{d}x - xz \, \mathrm{d}y + yz^2 \, \mathrm{d}z$. Nach dem Stokesschen Satz ist $\int_{\partial S} \omega = \int_S \mathrm{d}\omega$.

Verifizieren Sie diese Gleichung für die obige 1-Form.

Aufgabe 3

Sei W der Einheitswürfel im $\mathbb{R}^3$. Sein Rand besteht aus 6 Quadraten, die einzeln zu parametrisieren sind, wobei gegenüberliegende Randquadrate jeweils umgekehrt orientiert sind.
Ist nun $\omega = (2x - z) \, \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + x^2 y \, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z - xz^2 \, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$, so gilt nach dem allgemeinen Stokesschen Satz (im obigen Kontext auch Gaußscher Satz genannt) $\int_{\partial W} \omega = \int_W \mathrm{d}\omega$.

Verifizieren Sie diese Gleichung für die obige 2-Form.