Mathematik III für Physiker und Elektrotechniker WS04/05
Aufgabenblatt 9

Name(n)	*Tutor*	*Datum*

Aufgabe 1

a) $t \to \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$ ist eine Parametrisierung einer eindimensionalen Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$, nämlich einer Geraden *g*. Finden Sie eine 1-Form ω im $\mathbb{R}^3$, welche eine Volumenform auf *g* ist, und zeigen Sie explizit die eine Volumenform chararkterisierende Eigenschaft, daß $\forall x \in g, \xi_x \in T_x g, \|\xi_x\| = 1 : \omega(x)(\xi_x) = \pm 1$.

Finden Sie ein Intervall $I \subset g$ der Länge 7 und zeigen Sie, daß $\int_I \omega = \pm 7$.
(ω definiert ja eine Orientierung auf g. Das Integral $\int_I \omega$ wird positiv, wenn die zu seiner Berechnung gewählte Parametrisierung orientierungserhaltend ist.)

b) $\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix} + v\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\2\end{pmatrix}$ ist eine Parametrisierung einer zweidimensionalen Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^4$, nämlich einer Ebene E. Finden Sie eine 2-Form ω im $\mathbb{R}^4$, welche eine Volumenform auf *E* ist, und zeigen Sie explizit die eine Volumenform chararkterisierende Eigenschaft, nämlich daß $\forall x \in E, \xi_x, \eta_x$ Orthonormalbasis von $T_x E : \omega(x)(\xi_x, \eta_x) = \pm 1$.

Aufgabe 2

Erinnern Sie sich an die stereographische Abbildung $\Psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, welche jedem Punkt $\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$ des als xy-Ebene des $\mathbb{R}^3$ gedachten $\mathbb{R}^2$ den Schnittpunkt $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ der Geraden durch $p = \begin{pmatrix}u\\v\\0\end{pmatrix}$ und den Nordpol $N = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ mit der Einheitssphäre S^2 zuordnet. Diese Abbildung ist eine Parametrisierung von $S^2 - \{N\}$ als zweidimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$. Die Volumenform der S^2 ist bereits bekannt, $\omega = z\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z + x\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$. Berechnen Sie die Oberfläche $\int_{S^2} \omega$ durch Pullback über die stereographische Projektion. (Sie sollten das dann entstehende Integral im $\mathbb{R}^2$ mit Hilfe von Polarkoordinaten berechnen.)

Aufgabe 3

"Kugelkoordinaten" kann man auf jeder Sphäre S^n bzw. R^n einführen. Wir kennen sie auf S^1 bzw. $\mathbb{R}^2$ als übliche Polarkoordinaten r,φ, auf S^2 bzw. $\mathbb{R}^3$ als r,φ,θ und nun auf S^3 bzw. $\mathbb{R}^4$ durch die Parametrisierung $\Psi :]0,\infty[\times]0,2\pi[\times]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\times]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\to\mathbb{R}^4$,

$$\begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \theta \\ \psi \end{pmatrix} \to r \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\theta\cos\psi \\ \sin\varphi\cos\theta\cos\psi \\ \sin\theta\cos\psi \\ \sin\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 .$$

(Klar, wie das Strickmuster ins n-Dimensionale fortzuführen ist.)

a) Berechnen Sie $\Psi^*(\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}w)$.

b) Betrachten Sie jetzt die Einschränkung von Ψ auf $]0,2\pi[\times]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\times]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ also die Abbildung $\begin{pmatrix} \varphi \\ \theta \\ \psi \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\theta\cos\psi \\ \sin\varphi\cos\theta\cos\psi \\ \sin\theta\cos\psi \\ \sin\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$, die wir ebenfalls schadlos Ψ nennen. Zeigen Sie zunächst, daß die Bildmenge von Ψ Teilmenge von $S^3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \middle| x^2+y^2+z^2+w^2=1 \right\}$ ist und daß Ψ injektiv ist und die Ableitungsmatrix $D\Psi$ überall den Rang 3 besitzt. Charakterisieren Sie diejenige Teilmenge von S^3, die nicht in der Bildmenge von Ψ vorkommt. (Entsprechend dem Nullmeridian bei den Kugelkoordinaten für die S^2)

c) Die 3-Form $\omega = x\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}w - y\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}w + z\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}w - w\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$ ist Volumenform auf S^3 . Berechnen Sie $\Psi^*\omega$ auf $]0,2\pi[\times]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\times]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ und damit $\mathrm{vol}(S^3) = \int_{S^3}\omega$

Bemerkung:
Statt obiger "Mercator-Koordinaten" für die S^3 könnte man in Analogie zur S^2 mit "stereographischen" Koordinaten arbeiten. Errechnen Sie also, wenn Sie Lust haben, konkret die stereographische Abbildung für die S^3 , formulieren und rechnen das Analogon von Aufg. 3b und berechnen das Integral in 3c über den Pullback mit der stereographischen Abbildung anstelle der Mercator-Abbildung. Sie erhalten dabei zunächst ein Integral im $\mathbb{R}^3$ mit einer Kugelsymmetrie, welches dann selbst wieder über Kugelkoordinaten zu errechnen ist.