Mathematik III für Physiker und Elektrotechniker WS04/05
Aufgabenblatt 8

Name(n)	Tutor	Datum

Aufgabe 1
Basteln Sie sich nach der in der Vorlesung gegebenen Anleitung ein Möbiusband.
(Nehmen Sie einen rechteckigen Papierstreifen, der wesentlich länger als breit ist und verdrehen Sie ihn einmal, bevor Sie die Enden verkleben.)

1) Zeichnen Sie in der Mitte des Bandes eine um das ganze Band umlaufende Linie. Was fällt auf?
2) Machen Sie dasselbe noch einmal mit einem zweiten Band und zerschneiden Sie dann das Band entlang der Mittellinie. Was fällt auf?

Aufgabe 2
Geben Sie eine konkrete Parametrisierung eines Möbiusbands im $\mathbb{R}^3$ an mit der Breite 2, dessen Mittellinie entlang dem Kreis mit Radius 2 um den Nullpunkt der xy-Ebene verläuft.
(Dieses Band kann man sich entstanden denken durch obige Verklebung eines Streifens der Länge 4π und der Breite 2.)

Aufgabe 3
Ein 2-dimensionales Möbiusband M unendlicher Breite, also ohne Rand, kann man im $\mathbb{R}^4$ mit den Koordinaten durch die beiden Gleichungen $f(x,y,z,w)=x^2+y^2-1=0$,
$g(x,y,z,w)=(1+x)w^2-(1-x)z^2$ realisieren, d.h.
$M=\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 \mid f(x,y,z,w)=0, g(x,y,z.w)=0\}$.

Zeigen Sie:
a) Für jeden Punkt $\boldsymbol{x}\in M$ sind die Vektoren $\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}), \mathrm{d}g(\boldsymbol{x})\in T_x^*M$ linear unabhängig.
b) $\{(1,0,t,0) \mid t\in\mathbb{R}\}\subset M$ ($\{(1,0,t,0) \mid t\in\mathbb{R}\}$ ist eine Gerade im $\mathbb{R}^4$) und

$$\Phi:]0,2\pi[\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^4 \quad \text{mit} \quad \Phi(\varphi,t)=\left(\cos\varphi, \sin\varphi, t\cos\frac{1}{2}\varphi, t\sin\frac{1}{2}\varphi\right)$$

ist eine Parametrisierung von $M-\{(1,0,t,0) \mid t\in\mathbb{R}\}$.
c) Finden Sie eine weitere Gerade im R^4 , die Teilmenge von M ist und die den Punkt $(-1,0,0,0)$ enthält. Nennen Sie sie E und finden Sie eine Parametrisierung $\Psi:]0,2\pi[\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^4$ von $M-E$.
Bemerkung: Offenbar hat man mit den beiden Parametrisierungen aus b,c) einen Atlas auf M !

d) Sei $K=\{(x,y,0,0) \mid x^2+y^2=1\}$ der Einheitskreis in der xy-Ebene des $\mathbb{R}^4$. Zeigen Sie: Zu jedem Punkt $\boldsymbol{x}\in K$ kann man eine Gerade $E_{\boldsymbol{x}}\subset R^4$ finden, für die auch gilt $E_{\boldsymbol{x}}\subset M$,
$E_{\boldsymbol{x}}\cap E_{\boldsymbol{y}}=\emptyset$ für $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K, \boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{y}$ und $M=\bigcup_{x\in K} E_x$.
(M ist also eine aus Geraden aufgebaute Fläche, damit eine sogenannte "Regelfläche".)

Wir werden später noch einmal auf die Nicht-Orientierbarkeit der in Aufg. 2 und Aufg. 3 behandelten Möbiusbänder zurückkehren, indem dann gezeigt wird, daß auf ihnen keine nirgends verschwindende 2-Form existiert.

Ist M eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ und ω eine k-Form auf M[1], so heißt ω Volumenform auf M, wenn für jedes $x \in M$ und jede Orthonormalbasis $\xi_1(x), \ldots, \xi_k(x)$ von $T_x M$ gilt: $\omega(x)\left(\xi_1(x), \ldots, \xi_k(x)\right) = \pm 1$.

Das heißt insbesondere auch, daß ω nirgends verschwindet. Eine nirgends verschwindende k-Form auf M definiert eine Orientierung auf M: man nennt eine Basis $\xi_1(x), \ldots, \xi_k(x)$ von $T_x M$ orientiert, wenn $\omega(x)\left(\xi_1(x), \ldots, \xi_k(x)\right) > 0$. Durch eine Volumenform ist also automatisch auch eine Orientierung der Mannigfaltigkeit gegeben.

Aufgabe

Sei γ eine 1-dimensionale Untermannifaltigkeit des $\mathbb{R}^2$, gegeben als parametrisierte Kurve . Denken wir uns γ eingebetter in eine ganze "Kurvenschar" $c : [a, b] \times]-1,1[\to \mathbb{R}^2$, wobei die einzelnen Kurven durch $c_s(t) = c(t, s)$ gegeben sind. Weiterhin sei $c_0 = \gamma$ und die Ableitungsmatrix der Abbildung c besitze überall den Rang 2.

Wir wissen, daß die Länge jeder Kurve c_s durch das Integral $l(s) = \int_a^b \left\| c_s'(t) \right\| dt$ gegeben ist und können daher die Funktion l als Funktion auf der offenen Menge $V = c\left( ]a, b[\times]-1,1[\right) \subset \mathbb{R}^2$ auffassen, welche die ursprüngliche Kurve γ umfaßt.

Zeigen sie, daß die 1-Form $\omega = \mathrm{d}\, l$ eine Volumenform auf der 1-dimensionalen Untermannifaltigkeit γ ist und daß $\int_\gamma \omega = l(\gamma)$.

---

1 d.h. ω ist definiert auf einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, die M enthält.