Mathematik III für Physiker und Elektrotechniker WS04/05 Aufgabenblatt 7		
Name(n)	***Tutor***	***Datum***

Betrachten Sie den folgenden Paraboloiden im $\mathbb{R}^3$: $P=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \mid y^2+z^2-x=0\right\}$.

1.Finden Sie eine Parametrisierung dieser zweidimensionalen Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$.

2. Berechnen Sie $\alpha=\mathrm{d}f$ mit $f(x,y,z)=y^2+z^2-x$. Zeigen Sie, daß α normal zu P ist, d.h. $\forall\, \boldsymbol{x}\in P,\ v_x\in T_{\boldsymbol{x}}P : \alpha(\boldsymbol{x})(v_{\boldsymbol{x}})=0$.

3. Zu zwei 1-Formen $\alpha=\alpha_x\,\mathrm{d}x+\alpha_y\,\mathrm{d}y+\alpha_z\,\mathrm{d}z,\ \beta=\beta_x\,\mathrm{d}x+\beta_y\,\mathrm{d}y+\beta_z\,\mathrm{d}z$ ist ihr "Skalarprodukt" die durch $<\alpha,\beta>=\alpha_x\beta_x+\alpha_y\beta_y+\alpha_z\beta_z$ definierte Funktion. Wie üblich schreibt man auch $\|\alpha\|=\sqrt{<\alpha,\alpha>}$. Finden Sie in einer Umgebung des Nullpunkts im $\mathbb{R}^3$ zu der in 1. konstruierten Form α zwei weitere 1-Formen β,γ so daß $<\alpha,\beta>=0, <\beta,\gamma>=0, <\alpha,\gamma>=0$.
(Entweder durch Nachdenken, oder über den Gram-Schmidt-Prozeß.)

4. Normieren Sie die drei Formen α,β,γ zu $\tilde{\alpha}=\frac{1}{\|\alpha\|}\alpha,\ \tilde{\beta}=\frac{1}{\|\beta\|}\beta,\ \tilde{\gamma}=\frac{1}{\|\gamma\|}\gamma$ und rechnen Sie nach, daß $\tilde{\alpha}\wedge\tilde{\beta}\wedge\tilde{\gamma}=\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$.

5. Man setze $*\mathrm{d}x=\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z,\ *\mathrm{d}y=\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}y,\ *\mathrm{d}z=\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$ und per linearer Fortsetzung $*\alpha=\alpha_x\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+\alpha_y\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+\alpha_z\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$. Man rechne nach, daß $*\tilde{\alpha}=\tilde{\beta}\wedge\tilde{\gamma}$.

6. Die Fläche des Paraboloidenabschnitts $P_1=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \mid y^2+z^2-x=0,\ x\leqslant 1\right\}$ ist gegeben durch das "Integral über die Volumenform" $\int_{P_1}\tilde{\beta}\wedge\tilde{\gamma}$. Berechnen Sie dieses Integral mit Hilfe der Parametrisierung aus 1.
(Beachten Sie, daß die Berechnung von $\tilde{\beta}\wedge\tilde{\gamma}$ mit Hilfe des "*-Operators" aus 5. viel einfacher ist als die relativ langwierige Berechnung über die einzelnen Formen β,γ .