Mathematik III für Physiker und Elektrotechniker WS04/05
Aufgabenblatt 5

Name(n)	*Tutor*	*Datum*

Aufgabe 1

Sei λ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$ bzw. [0,1].

a) Finden Sie eine stetige Funktion auf $\mathbb{R}$, die integrabel, aber nicht quadratintegrabel ist, die also in $L^1(\mathbb{R},\lambda)$ liegt, aber nicht in $L^2(\mathbb{R},\lambda)$. (Die entsprechenden Eigenschaften sollen natürlich nachgewiesen werden!)

b) Finden Sie eine stetige Funktion auf $\mathbb{R}$, die quadratintegrabel, aber nicht integrabel ist.

c) Finden Sie eine stetige Funktion auf [0,1[, die integrabel, aber nicht quadratintegrabel ist.

d) Finden Sie eine stetige Funktion auf [0,1[, die quadratintegrabel aber nicht integrabel ist.

Aufgabe 2

Sei $\|*\|$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$.

a) Ist die Funktion $[-1,1]\times[-1,1]\rightarrow\overline{\mathbb{R}}$ $\quad x\rightarrow\frac{1}{\|x\|}$ integrabel?

b) Ist die Funktion $[-1,1]\times[-1,1]\rightarrow\overline{\mathbb{R}}$ $\quad x\rightarrow\frac{1}{\|x\|^2}$ integrabel?

c) Ist die Funktion $[-1,1]\times[-1,1]\times[-1,1]\rightarrow\overline{\mathbb{R}}$ $\quad x\rightarrow\frac{1}{\|x\|}$ integrabel?

d) Ist die Funktion $[-1,1]\times[-1,1]\times[-1,1]\rightarrow\overline{\mathbb{R}}$ $\quad x\rightarrow\frac{1}{\|x\|^2}$ integrabel?

Aufgabe 3

Sei G das von den Punkten $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ berandete Dreieck, $f=\chi_G$ dessen charakteristische Funktion. Man rechne nach, daß $\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda(y)\right)\mathrm{d}\lambda(x)=\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda(x)\right)\mathrm{d}\lambda(y)$.
(Dieser Wert ist natürlich die Fläche des Dreiecks.)

Aufgabe 4

Die Fourierkoeffizienten der Funktion $f:[0,1]\to\mathbb{C}$ sind $c_n=\int_0^1 f(x)\exp(2\pi i x)\,\mathrm{d}x$.
Entsprechend definieren wir für eine Funktion $f:[0,1]\times[0,1]\to\mathbb{C}$ die Fourierkoeffizienten
$c_{mn}=\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\exp\big(2\pi i(mx+ny)\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Sei jetzt $N=2^n$ und (a_{ij}) eine komplexe $N\times N$ Matrix .
(Ein aus Pixeln aufgebautes 2-dimensionales Bild wird in natürlicher Weise durch eine Matrix beschrieben.)

a) Formulieren Sie Formeln für die diskrete Fouriertransformation von a und ihre Inverse.
b) (freiwillige Sonderaufgabe) Formulieren Sie Formeln für eine schnelle Fouriertransformation von a und ihre Inverse.

Wer Lust hat, könnte auch noch überlegen, wie Formeln für eine „schnelle Walsh-Transformation“ (siehe Blatt 4) aussehen sollten und diese ggf. programmieren.