Mathematik III für Physiker und Elektrotechniker WS04/05 **Aufgabenblatt 4**		
Name(n)	***Tutor***	***Datum***

Aufgabe 1

Die diskrete Fouriertransformation läßt sich interpretieren als lineare Abbildung $\mathcal{F}: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$,

$$a = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} \to b = \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{pmatrix} = \mathcal{F}(a) \quad , \quad b_k = \frac{1}{\sqrt{(n)}} \sum_{j=0}^{n-1} a_j \exp\left(-2\pi i \frac{jk}{n}\right) \quad .$$

a) Schreiben Sie für n=3 und n=8 die zur kanonischen Basis des $\mathbb{C}^n$ gehörigen Matrixdarstellungen von $\mathcal{F}$ hin. Lassen Sie dabei auftretende komplexe Zahlen in der Form $\exp\left(\pi i \frac{m}{n}\right)$ stehen, außer, wenn 1,-1,i , -i herauskommt. Überzeugen Sie sich, daß es sich um unitäre Matrizen handelt, d.h. die Spalten haben Länge 1 und stehen aufeinander senkrecht bzgl. dem kanonischen hermitischen Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$.

b) Skizzieren Sie die Matrix zu $\mathcal{F}$ ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$.

Zeigen Sie, daß die inverse Abbildung $\mathcal{F}^{-1}$ gegeben ist durch $\begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{pmatrix} \to a = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \mathcal{F}^{-1}(b)$

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{(n)}} \sum_{j=0}^{n-1} b_j \exp\left(2\pi i \frac{jk}{n}\right)$$

Aufgabe 2

Lesen Sie die „Bemerkungen zur diskreten und schnellen Fouriertransformation", s. Link neben dem, der zu diesem Aufgabenzettel führte und machen Sie sich mit den beiden dort beschriebenen Algorithmen zur schnellen Fouriertransformation vertraut.

a) Benutzen Sie einen dieser Algorithmen, um für n=1,2,3 jeweils die diskrete Fouriertransformation der Werte $a_0, \ldots, a_{2^n-1} \in \mathbb{C}$ zu berechnen und so die Korrektheit der „schnellen" Formeln zu prüfen.

b) Schreiben Sie eine Pari-Funktion, welche als Input die Zahl n und einen Vektor $a \in \mathbb{C}^n$ nimmt und als Output den Vektor $b=\mathcal{F}_n(a)$ ausgibt, indem Sie einfach die Formel $b_j=\sum_{j=0}^{n-1} a_j \exp\left(-2\pi i \frac{jk}{n}\right)$ programmieren.

c) Schreiben Sie äquivalente Pari-Funktion, welche den FFT-Algorithmus aus b) nutzt und vergleichen das Laufzeitverhalten z.B. bei n=512 mit b) .

Aufgabe 3

Zunächst definiere man auf [0,1[die Funktion $r(x)=\begin{cases} 1, \text{falls } 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2} \\ -1, \text{falls } \frac{1}{2}<x<1 \end{cases}$ und setze sie dann periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ fort. Anschließend setze man für $n\in\mathbb{N}$ $r_n(x)=r(2^n x)$. Jede natürliche Zahl $n\in\mathbb{N}_0$ kann man eindeutig darstellen in der Form $n=\sum_{k=0}^{\infty} n_k 2^k$ mit $r_k\in\{0,1\}$ (Binärsystem), wobei natürlich alle bis auf endlich viele der Koeffizienten n_k Null sind, d.h. man beschreibt jede Zahl durch einen "Bitstring".

Man setze jetzt $w_n=\prod_{k=0}^{\infty} r_k^{n_k}=r_0^{n_0} r_1^{n_1}\cdots r_k^{n_k}\cdots$, wobei es sich für jedes $n\in\mathbb{N}$ natürlich um ein endliches Produkt handelt, denn die Faktoren werden ja 1, sobald die Koeffizienten n_k 0 werden.

Die Funktionen w_n können wir auf ganz $\mathbb{R}$ betrachten, oder uns auch auf [0,1] eingeschränkt denken. Man nennt sie auch "Walsh-Funktionen".

Sei $N=2^n$. Man betrachte auf [0,1] die Walsh-Funktionen $w_0,\ldots,w_{N-1}$. Eine reellwertige Treppenfunktion $f=\sum_{k=0}^{N-1} a_i \chi_{[\frac{k}{N},\frac{k+1}{N}[}$ auf [0,1] kann mit dem Vektor $a=\begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{N-1}\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n$ identifiziert werden. Da die Walsh-Funktionen selbst solche Treppenfunktionen sind, können sie als Elemente des $\mathbb{R}^n$ aufgefaßt werden, deren Koordinaten sämtlich 1 oder -1 sind. In ihrer Interpretation als Elemente von $L^2_{\mathbb{R}}([0,1],\lambda)$ haben die w_n die Länge 1, in ihrer Interpretation als Elemente des $\mathbb{R}^n$ haben sie die Länge $\sqrt{(N)}$; in beiden Interpretationen stehen sie paarweise aufeinander senkrecht.

Sei n=4.

Skizzieren Sie die Walsh-Funktionen $w_0,\ldots,w_{15}$ als Funktionen $[0,1]\rightarrow\mathbb{R}$ und geben Sie ihre Koordinaten als Vektoren des $\mathbb{R}^{16}$ an.