Mathematik III für Physiker und Elektrotechniker WS04/05
Aufgabenblatt 2

Name(n)	*Tutor*	*Datum*

Lesen Sie neben Ihrer Vorlesungsmitschrift die "Definitionen und Aussagen zur Maßtheorie",
http://www.informatik.uni-bremen.de/~michaelh/Lehrveranstaltungen/mathphysIII_WS04/Masstheorie.pdf

Aufgabe 1

Man betrachte das abgeschlossene Intervall M=[0,1] und das Lebesgue-Maß λ auf diesem Raum, welches Intervallen in M ihre Länge zuordnet.

Man setze auf M $f_0 \equiv 1$, $f_1(x)=\begin{cases} 1, \text{falls}\, 0 \leqslant x < \frac{1}{2} \\ -1 \text{ falls}\, \frac{1}{2} \leqslant x < 1 \end{cases}$, $g_1(x)=\begin{cases} 1, \text{falls}\, \frac{1}{4} \leqslant x < \frac{3}{4} \\ -1 \text{ sonst} \end{cases}$

und dann induktiv $f_{n+1}(x)=\begin{cases} f_n(2x), \text{falls}\, 0 \leqslant x < \frac{1}{2} \\ f_n\left(2(x-\frac{1}{2})\right) \quad \text{sonst} \end{cases}$, $g_{n+1}(x)=\begin{cases} g_n(2x), \text{falls}\, 0 \leqslant x < \frac{1}{2} \\ g_n\left(2(x-\frac{1}{2})\right) \quad \text{sonst} \end{cases}$

Wir betrachten den Raum der meßbaren quadratintegrablen Funktionen auf M, also $L^2_{\mathbb{R}}(M,\lambda)$ mit dem Skalarprodukt $< f , g >= \int_M fg \,\mathrm{d}\lambda$.

a) Skizzieren Sie, wie die Treppenfunktionen f_i, g_i aussehen und zeigen Sie dann, daß die f_i, g_i ein Orthonormalsystem bilden, daß sie also paarweise bezüglich obigen Produkts aufeinander senkrecht stehen und die Norm 1 besitzen. (Wenn Ihnen der allgemeine Beweis schwer fällt, suchen Sie nur eine Begründung für die f_i, g_i mit $i \leqslant 3$.)

b) Berechnen Sie für die Funktion $\varphi(x)=1-x^2$ die Koeffizienten $a_i = <\varphi, f_i>$ für $0 \leqslant i \leqslant 3$ und $b_i = <\varphi, g_i>$ für $1 \leqslant i \leqslant 3$. Plotten Sie anschließend die Funktionen φ und $\varphi_3 = a_0 + \sum_{i=1}^{3} a_i f_i + \sum_{i=1}^{3} b_i g_i$. (Computereinsatz!)

Aufgabe 2

Interpretieren Sie die in Aufgabe 1 definierte Funktion f_1 als Funktion auf $\mathbb{R}$ und definieren Sie für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ $\quad f_{2n}(x) = f_1\left(x - n + \frac{1}{2}\right) \quad f_{2n+1}(x) = f_1(x-n)$.

Die f_n sind allesamt Treppenfunktionen, daher ist ihr Integral leicht zu berechnen.
.

Setzen Sie nun $g_n = \sum_{i=1}^{n} f_i$ und machen sich eine Skizze vom Verlauf der f_n und der g_n .

a) Berechnen Sie für alle $x \in \mathbb{R}$ die Grenzfunktion $g_{(x)} = \lim_{n\to\infty} g_n(x)$.

b) Stellen Sie fest, ob $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g_n \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} g \, d\lambda$. (*)

Falls nein, begründen Sie, wieso dies nicht dem Satz von der beschränkten Konvergenz widerspricht, d.h. geben Sie genau an, wo eine von dessen Voraussetzungen verletzt ist.

c) Nicht abzugeben: Überlegen Sie, wieso die Gleichung (*) äquivalent ist zu
$\sum_{i=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{i=0}^{\infty} f_i \right) d\lambda$.

Aufgabe 3

Denken Sie sich ein gleichseitiges Dreieck Δ_1 der Kantenlänge 1, inclusive seinen Randpunkten. Indem Sie die Mittelpunkte der Seiten verbinden, entstehen 4 gleichseitige Dreiecke der Kantenlänge ½ . Nehmen Sie das innere Dreieck heraus, belassen jedoch seine Kanten und nennen die entstehende Figur Δ_2 . Δ_2 besteht nun aus drei abgeschlossenen Teildreiecken der Kantenlänge ½ . Unterteilen Sie diese Dreiecke wieder in 4 vier kongruente Teildreiecke und nehmen jeweils das mittlere, aber nicht dessen Kanten, heraus. Dadurch erhalten Sie Δ_3 , undsoweiter bis zu Δ_n und $\Delta_\infty = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Delta_n$.

a) Stellen Sie die einige der Δ_n graphisch dar, indem Sie z.B. die Menge der herausgenommenen Dreiecke schwarz färben, oder die jeweils belassenen Dreiecke rot, grün und blau färben.

b) Wieso ist Δ_∞ Borel-meßbar? (Die Borelsche $\sigma-$Algebra ist die kleinste $\sigma-$Algebra , welche die offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ enthält.)

c) Welchen Flächeninhalt besitzt Δ_∞ ? (Hinweis: dies ist m.E. die einfachste Teilaufgabe.)

d) Geben Sie die Koordinaten von 10 Punkten von Δ_∞ an.

e) Freiwillige Sonderaufgabe: Vielleicht bringt Sie die Lösung von d) auf eine Begründung dafür, daß Δ_∞ sogar überabzählbar unendlich viele Punkte besitzt.