Mathematik III für Physiker und Elektrotechniker WS04/05
Aufgabenblatt 2

Name(n)	*Tutor*	*Datum*

Lesen Sie neben Ihrer Vorlesungsmitschrift die "Definitionen und Aussagen zur Maßtheorie",
http://www.informatik.uni-bremen.de/~michaelh/Lehrveranstaltungen/mathphysIII_WS04/Masstheorie.pdf

Aufgabe 1

Sei M eine Menge, $\mathfrak{A}$ eine $\sigma-$Algebra auf M, also $(M, \mathfrak{A})$ ein meßbarer Raum.
Eine Funktion $f: M \to \mathbb{R}$ ist genau dann meßbar, wenn für jedes offene Intervall $I \subset \mathbb{R}$ gilt: $f^{-1}(I) \in \mathfrak{A}$.

Sei nun $A \subset M$ eine beliebige Menge. Zeigen Sie, daß die charakteristische Funktion χ_A genau dann meßbar ist, wenn $A \in \mathfrak{A}$.

Aufgabe 2

a) Finden Sie eine $\sigma-$Algebra auf der Menge $M = \{1,2,3,4\}$, die von $\mathfrak{P}(M)$ und $\{\emptyset, M\}$ verschieden ist.

b) Die Borelsche $\sigma-$Algebra $\mathfrak{B}$ auf dem $\mathbb{R}^n$ wird erzeugt von den offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, d.h. sie ist die kleinste $\sigma-$Algebra auf $\mathbb{R}^n$, die die offenenen Teilmengen enthält.
Man zeige, daß $\mathfrak{B}$ die einpunktigen Mengen enthält, daß also $\forall x \in \mathbb{R}^n : \{x\} \in \mathfrak{B}$.
(Wem dies zu kompliziert wird, zeige es nur für $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$.)

Aufgabe 3

Das Lebesgue-Maß λ mißt den Inhalt von Teilmengen des $\mathbb{R}^n$.
Man betrachte die Intervalle $I_1 = [0, \frac{1}{10}[\,, I_2 = [\frac{1}{10}, \frac{2}{10}[\,, \ldots, I_{10} = [\frac{9}{10}, 1[\subset \mathbb{R}$, deren linke Randpunkte $x_i = \frac{i-1}{10}$, sowie die Funktion

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to x^2$. Man berechne die Mengen $A_i = f^{-1}(I_i)$, skizziere die Treppenfunktion $g = \sum_{i=1}^{10} x_i \chi_{A_i}$ und berechne $\int_{\mathbb{R}} g \, d\lambda$

b) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \to x^2 + y^2$, und weiter wie in a) .

Aufgabe 4

Betrachten Sie ähnlich wie für Blatt 1 den Raum $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}[a,b] := \{ f \mid f:[a,b] \to \mathbb{C} \text{ stetig} \}$ mit dem durch $\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x$ gegebenen komplexen Skalarprodukt, setzen $[a,b] = [0, 2\pi]$, und betrachten für $n \in \mathbb{Z}$ die durch $f_n(x) = \exp(inx)$ gegebene Funktionenfolge.

Wenden Sie die Ihnen bekannten Integrationsregeln an um zu zeigen:

$< f_n, f_n > = 2\pi$ für $n \in \mathbb{Z}$
$< f_n, f_m > = 0$ für $n, m \in \mathbb{Z},\ n \neq m$

Zerlegen Sie die Ausdrücke $< f_n, f_m >$ auch in Real- und Imaginärteile, um die Bedeutung obiger Formeln genauer zu erkennen.