Mathematik III für Physiker und Elektrotechniker WS04/05 **Aufgabenblatt 1**		
Name(n)	***Tutor***	***Datum***

Aufgabe 1

Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall und $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}[a,b] := \{ f \mid f : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ stetig} \}$ die Menge der auf diesem Intervall definierten stetigen reellwertigen Funktionen. Diese Menge ist in natürlicher Weise ein Vektorraum. (Welche Funktion ist sein neutrales Element?) Durch $\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x) g(x) \,\mathrm{d}x$ ist auf $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}[a,b]$ ein Skalarprodukt definiert, und daher durch $\|f\| := \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x}$ eine Norm und daher durch $d(f,g) := \|f-g\|$ eine Metrik. Allerdings ist $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}[a,b]$ bezüglich dieser Metrik nicht mehr vollständig, wie Sie im folgenden sehen:

a) Setzen Sie $[a,b]=[-1,1]$, $f_n(x)=-1$ für $-1 \leqslant x < \frac{-1}{n}$, $f_n(x)=nx$ für $\frac{-1}{n} < x < \frac{1}{n}$ und $f(x)=1$ für $\frac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1$. (Machen Sie sich ein Bild!) Setzen Sie weiterhin $g(x)=-1$ für $-1 \leqslant x < 0$ und $g(x)=1$ für $0 \leqslant x \leqslant 1$. Zeigen Sie, daß bezüglich der obigen Metrik gilt: $f_n \to g$. (Wir haben also eine Folge stetiger Funktionen, die bezüglich dieser Metrik gegen eine unstetige Funktion konvergiert; der Raum der stetigen Funktionen ist also nicht vollständig bezüglich obiger Metrik.)

b) Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $f_n(x)=x^n$. Zeigen Sie, daß $f_0, \ldots, f_n$ in $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}[a,b]$ linear unabhängig sind.

c) Setzen Sie $p_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} f_0$ $\qquad \widetilde{p_{n+1}} = f_{n+1} - \sum_{i=0}^{n} \langle f_{n+1}, p_i \rangle p_i$ und $p_{n+1} := \frac{\widetilde{p_n+1}}{\|\widetilde{p_n+1}\|}$ (Gram-Schmidt-Prozeß) . Die Polynome p_n stehen bezüglich des Skalarprodukts < , > aufeinander senkrecht und haben die Norm 1 und bilden somit ein sogenanntes Orthonormalsystem auf $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}[a,b]$. Berechnen Sie die „Legendre Polynome“ $p_0, \ldots, p_4$, und zeigen Sie noch einmal explizit, daß $\langle p_2, p_3 \rangle = 0$.

d) Prüfen Sie nach, daß die in c) errechneten Legendre Polynome $p_2, \ldots, p_4$ die Legendre Differentialgleichung $(1-x^2) y'' - 2xy' + n(n+1) y = 0$ erfüllen.