Mathematische Grundlagen der Informatik III, WS 2002/03
Aufgabenblatt 1

Es geht um die Begriffe „Differenzierbarkeit in einem Punkt" und „Ableitung" in einer und mehreren Veränderlichen, sowie um Berechnung partieller Ableitungen und deren Zusammenfassung zur „totalen" Ableitung.

Aufgabe 1.

Gegeben sei die Abbildung $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$. Man zeige durch direktes Ausrechnen des Grenzwerts, dass $f'(2)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=4$. Hinweis: Man muß also für eine beliebige Folge reeller Zahlen $(x_n)\to 2,\ x_n\neq 2$ zeigen, dass $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(x_n)-f(2)}{x_n-2}=4$.

Aufgabe 2.

Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ an der Stelle $x_0:=3$ differenzierbar. Es gibt also eine Zahl $a\in\mathbb{R}$ nämlich die Ableitung von f an der Stelle $x_0:=3$, so dass gilt:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\forall x\in\mathbb{R}:\ |x-3|<\delta\to\left|\frac{f(x)-f(3)}{x-3}-a\right|<\varepsilon\ .$$

Folgern Sie hieraus, dass f an der Stelle $x_0:=3$ stetig ist. (Dazu muß man die $\varepsilon,\delta-$Definition der Stetigkeit kennen.)

Aufgabe 3.

Sei $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ gegeben durch $f(x_1,x_2)=x_1{}^2+x_2{}^2$. Sei $x^0:=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass f in x^0 differenzierbar und daß $Df\left(x^0\right)$ die Nullabbildung ist, indem Sie direkt nachweisen, dass $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\forall x\in\mathbb{R}:\|x\|<\delta\to|f(x)|<\varepsilon\|x\|$.

Aufgabe 4.

Sei $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ gegeben durch $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_2x_3$. Berechnen Sie für den Punkt $x^0:=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ durch direkte Berechnung der partiellen Ableitungen $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)$ die Ableitung

$$Df(x^0)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(x^0),\frac{\partial f}{\partial x_2}(x^0),\frac{\partial f}{\partial x_3}(x^0)\right).$$