Mathematische Grundlagen der Informatik III, WS 2002/03
Aufgabenblatt 11

Aufgabe 1.

a) Gegeben sei das homogene Differentialgleichungssystem $y' = Ay$ mit $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Man berechne die Fundamentallösung $\Phi(t) = \exp(tA)$ und verifiziere die Gleichung $\Phi'(t) = A\Phi(t)$.

b) Gegeben sei das homogene Differentialgleichungssystem $y' = Ay$ mit

$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & -4 \\ 2 & -1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$. Man berechne eine Lösung $\varphi(t)$ mit $\varphi(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Hinweis: Das charakteristische Polynom von A ist $(\lambda - 1)^2 (\lambda + 1)^2$. Man muß den Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ aufspalten in eine Summe von Vektoren v_i, die in den verallgemeinerten Eigenräumen der zu A gehörigen Eigenwerte liegen. Für jedes v_i lässt sich $\exp(tA)\,v_i$ berechnen.

Aufgabe 2

Gegeben sei das inhomogene Differentialgleichungssystem $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \exp(3t) \\ 1 \end{pmatrix}$

Man finde eine Lösung $\varphi(t)$ mit $\varphi(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Lösungsweg (vgl. Vorlesung): Man löse zunächst das homogene System mit den Anfangsbedingungen $\varphi_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\varphi_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, also $\varphi_1(t) = \exp(tA)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\varphi_2(t) = \exp(tA)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und setze die beiden Lösungen φ_1, φ_2 zu einer Fundamentallösung $\Phi(t) = \exp(tA) = \exp(tA)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (\varphi_1, \varphi_2)$ zusammen. Sodann finde man eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems mit Hilfe des in der Vorlesung gezeigten Ansatzes $\psi(t) = \Phi(t)u(t)$, welcher eine explizite Integralformel für $u(t)$ liefert. Man berechne dann $\psi(0)$ und addiere eine geeignete Lösung des homogenen Systems, um eine Lösung des inhomogenen Systems mit der oben geforderten Anfangsbedingung zu erhalten.