Mathematische Grundlagen der Informatik III, WS 2002/03
Aufgabenblatt 8

Aufgabe 1.

Sei $F := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| x^2 + y^2 = 1 \right\}$ eine Zylinderfläche.

a) Finden Sie eine Parametrisierung $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit $\operatorname{Im}\varphi := \varphi\left(\mathbb{R}^2\right) = F$ und

$\forall \begin{pmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2\colon \operatorname{Rang}\left(\mathrm{D}\varphi\begin{pmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \end{pmatrix} \right) = 2$.

b) Für $p \in \mathbb{R}^3$ ist $T_p\mathbb{R}^3 := \{p\} \times \mathbb{R}^3$ der Tangentialraum in *p* mit der in der Vorlesung beschriebenen Vektorraumstruktur. Mit $e_i(p) := (p, e_i)$ erhält man die kanonische Basis von $T_p\mathbb{R}^3$. Wiederum mit e_i bezeichnet man nun das Basis-Vektorfeld im $\mathbb{R}^3$, also die Abbildung $\mathbb{R}^3 \to T\mathbb{R}^3 = \bigcup_{p \in \mathbb{R}^3} T_p\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, welches jedem Punkt *p* den Vektor $e_i(p)$ zuordnet. Jedes Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}\left(\mathbb{R}^3\right)$ lässt sich also als Linearkombination $X = \lambda e_1 + \mu e_2 + \kappa e_3$ schreiben, wobei λ, μ, κ Funktionen sind; in jedem Einzelpunkt *p* hat man $X(p) = \lambda(p)e_1(p) + \mu(p)e_2(p) + \kappa(p)e_3(p) \in T_p\mathbb{R}^3$. Mittels des Skalarprodukts auf $\mathbb{R}^3$ lässt sich für zwei Vektoren $X(p), Y(p) \in T_p\mathbb{R}^3$ feststellen, ob sie aufeinander senkrecht stehen. Man sagt, zwei Vektorfelder *X,Y* stehen senkrecht aufeinander, wenn dies für alle beteiligten Vektoren $X(p), Y(p)$ gilt.

Ist $p \in F$, $\varphi\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = p$, so ist der Tangentialraum T_pF definiert als der 2-dimensionale Unterraum von $T_p\mathbb{R}^3$, der von den Vektoren $\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} e_1(p) + \frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} e_2(p) + \frac{\partial\varphi_3}{\partial x}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} e_3(p)$ und $\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} e_1(p) + \frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} e_2(p) + \frac{\partial\varphi_3}{\partial y}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} e_3(p)$ aufgespannt wird.

Man finde nun drei Vektorfelder $X, Y, Z \in \mathfrak{X}\left(\mathbb{R}^3\right)$, die in jedem Punkt aufeinander senkrecht stehen und für die außerdem gilt: $\forall p \in F : X(p), Y(p) \in T_pF$. (Offenbar durchdringt dann das Vektorfeld *Z* die Zylinderfläche senkrecht.)

Hinweis: die Aufgabe ist sehr einfach (keine Ironie!) Es geht lediglich darum, sich durch die Begriffe hindurchzukämpfen.

Aufgabe 2.

a) Man finde eine Parametrisierung des Kreises C mit Radius 1, der im $\mathbb{R}^3$ in einer Ebene liegt, die den Punkt $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ enthält und die auf dem Vektor $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ senkrecht steht. Gesucht ist also z.B. eine Abbildung $c:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^3$ mit $\mathrm{Im}(c)=C$ und $\forall t\in[0,2\pi]: c'(t)\neq 0$.

b) Es sei eine Einsform gegeben durch $\omega = xdx+ydy+zdz$. Das Kurvenintegral $\int_C \omega$ ist mit Hilfe der obigen Parametrisierung definiert durch

$$\int_0^{2\pi} \omega(c(t))(c'(t))dt = \int_0^{2\pi} \left(c_1(t)c_1'(t)+c_1(t)c_1'(t)+c_1(t)c_1'(t)\right)dt.$$

Man zeige, dass $\int_C \omega = 0$.

Aufgabe 3.

Sei $e^1=(1,0,0), e^2=(0,1,0), e^3=(0,0,1)$ die kanonische Basis des $\left(\mathbb{R}^3\right)^*$. Ein Element von $\Lambda^1\left(\mathbb{R}^3\right)^* := \left(\mathbb{R}^3\right)^*$ ist also lediglich ein Zeilenvektor $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$. Das äußere Produkt $\lambda\wedge\mu$ zweier solcher Vektoren $\lambda,\mu\in\Lambda^1\left(\mathbb{R}^3\right)^*$ ist definiert als diejenige alternierende Bilinearform $\varphi:\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, für die gilt: $\varphi(x,y)=\frac{1}{2}\left(\lambda(x)\mu(y)-\lambda(y)\mu(x)\right)$.

Man rechne jetzt für $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=\lambda_1e^1+\lambda_2e^2+\lambda_3e^3$, $\mu=(\mu_1,\mu_2,\mu_3)=\mu_1e^1+\mu_2e^2+\mu_3e^3$ nach, dass $\lambda\wedge\mu=(\lambda_1\mu_2-\lambda_2\mu_1)e^1\wedge e^2-(\lambda_1\mu_3-\lambda_3\mu_1)e^1\wedge e^3+(\lambda_2\mu_3-\lambda_3\mu_2)e^2\wedge e^3$, indem man zeigt, dass auf beiden Seiten der Gleichung dieselbe Bilinearform steht. (Man zeigt, dass zwei Bilinearformen φ,ψ auf $\mathbb{R}^3$ gleich sind, indem man zeigt: $\forall x,y\in\mathbb{R}^3: \varphi(x,y)=\psi(x,y)$)