Mathematische Grundlagen der Informatik III, WS 2002/03
Aufgabenblatt 7

Aufgabe 1.

Man berechne durch Integration
a) das Volumen einer Pyramide der Höhe *h*, deren Grundfläche ein Quadrat der Kantenlänge *l* ist.
b) das Volumen eines Kegels der Höhe *h*, dessen Grundfläche ein Kreis mit Radius *r* ist.
c) das Volumen des Körpers, der von der Ebene *z*=0, dem Zylinder $x^2 + y^2 = 2x$ und dem Kegel $x^2 + y^2 = z^2$ oberhalb der x-Achse eingeschlossen wird.

Aufgabe 2.

Man betrachte die Mengen $K_1 := \left\{(x,y,z) \middle| x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\right\}$, $K_2 := \left\{(x,y,z) \middle| x^2 + y^2 + z^2 < \frac{1}{2}\right\}$ und $K := \left\{(x,y,z) \middle| x^2 + y^2 \leq z^2, z > 0\right\}$.
Man berechne mit Hilfe der Integraltransformationsformel das Volumen von $M := (K_1 - K_2) \cap K$, indem man den Quader $Q := \left[\frac{1}{2}, 1\right] \times [0, 2\pi] \times \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ mittels der Abbildung $\Phi(r,\varphi,\theta) = (x,y,z) = (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\cos\varphi, r\cos\theta)$ auf *K* abbildet.

Aufgabe 3.

Auf der offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^5$ sei die 2-Form $\omega = \alpha dx_1 \wedge dx_4 + \beta dx_2 \wedge dx_3 + \gamma dx_3 \wedge dx_5$ gegeben, dabei seien die Funktionen $\alpha, \beta, \gamma \in C^\infty(U)$. Dann ist z.B.
$$d\alpha = \frac{\partial\alpha}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial\alpha}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial\alpha}{\partial x_3} dx_3 + \frac{\partial\alpha}{\partial x_4} dx_4 + \frac{\partial\alpha}{\partial x_5} dx_5 .$$

Man berechne $d\omega = d\alpha \wedge dx_1 \wedge dx_4 + d\beta \wedge dx_2 \wedge dx_3 + d\gamma \wedge dx_3 \wedge dx_5$ und zeige unter Benutzung der Symmetrie $\frac{\partial \frac{\partial\alpha}{\partial x_j}}{\partial x_i} = \frac{\partial^2\alpha}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2\alpha}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial \frac{\partial\alpha}{\partial x_i}}{\partial x_j}$ und der Antikommunativität $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$, dass $dd\omega = 0$.