Mathematische Grundlagen der Informatik III, WS 2002/03
Aufgabenblatt 4

Aufgabe 1.
Sei $f(x,y) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 2x^2y^2 - 2x^2y - 2xy^2 + 2y^2 - 2y^3 + y^4$.
a) Man finde alle Punkte $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ mit $Df(x_0, y_0) = 0$ (kritische Punkte von *f*).
b) Man stelle fest, ob es sich um lokale Maxima oder lokale Minima handelt, indem man die Matrix der 2. Ableitungen

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} \end{pmatrix}$$

in den kritischen Punkten auf positive oder negative Definitheit untersucht.

c) Sei $g(x,y) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{9}y^2$ und $E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \, g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \right\}$ die als Nullstellengebilde von g gegebene Ellipse. In welchen Punkten der Ellipse sind die Gradientenvektoren ∇f und ∇g linear abhängig? (Kritische Punkte von *f* auf *E.*) Man entscheide, ob in diesen kritischen Punkten auf *E* lokale Maxima oder lokale Minima vorliegen.

Zusatzaufgabe: Man stelle zunächst die Situation a) graphisch dar, indem man den Graphen von f plottet und versuche anschließend noch, die Ellipse in der xy-Ebene und ihre Bildmenge unter f im Graphen darzustellen.

Aufgabe 2.

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $I := [a,b]$, $f, g : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar, d.h. differenzierbar in einem etwas größeren offenen Intervall. Es sei $g(b) \neq g(a)$ und $g'(x) \neq 0$ in $[a,b]$. Man zeige, dass es dann ein $\xi \in \mathbb{R}$, $a < \xi < b$ gibt mit $g'(\xi) \neq 0$ und

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Diese Aussage heißt „***2. Mittelwertsatz***“ .
(Man lese auf der Vorlesungswebseite den Abschnitt, der sich mit dem ***1. Mittelwertsatz*** beschäftigt.) Unter obigen Voraussetzungen macht der 1. Mittelwertsatz folgende Aussage:

Es gibt ein $\xi \in \mathbb{R}$, $a < \xi < b$ mit $f'(\xi) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Man beweise nun die Aussage des 2. Mittelwertsatzes, in dem man den 1. Mittelwertsatz auf die folgende Funktion anwende: $h(x) := f(x)\big(g(b) - g(a)\big) - g(x)\big(f(b) - f(a)\big)$.

Aufgabe 3.

Der 2. Mittelwertsatz ist ein nützliches technisches Hilfsmittel. Es soll in der Vorlesung noch gezeigt werden, wie man aus ihm z.B. die Taylorformel mit dem Lagrange'schen Restglied ableitet (Aufgaben hierzu im kommenden Aufgabenblatt), sowie die folgende

Regel von L'Hôpital:
Seien f, g in einer offenen Umgebung des Punktes $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar und $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Existiert $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, so auch $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ und es gilt $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$.

Man berechne mit Hilfe der Regel von L'Hôpital folgende Grenzwerte:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x}, \quad \lim_{x \to 0} \frac{\exp(x) - 1}{x}, \quad \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2}, \quad \lim_{x \to 0} \frac{\exp(x) - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{x^3}$$

Man beachte, dass in den beiden letzten Beispielen die Regel mehrfach angewandt werden muß, um zum Ergebnis zu kommen.