Mathematische Grundlagen der Informatik III, WS 2002/03
Aufgabenblatt 3

Aufgabe 1.

Sei $U :=]0,2\pi[\times]0,2\pi[\subset \mathbb{R}^2$. Man gebe eine differenzierbare Abbildung

$$\Phi : U \to \mathbb{R}^3$$
$$(\varphi,\psi) \to \begin{pmatrix} \Phi_1(\varphi,\psi) \\ \Phi_2(\varphi,\psi) \\ \Phi_3(\varphi,\psi) \end{pmatrix}$$

an, so dass die Bildmenge $\Phi(U)$ folgenden Torus beschreibt: Der Zentralkreis durch diesen „Reifen" liege in der xy-Ebene, der Radius sei 2, der Mittelpunkt sei der Nullpunkt, der Querschnitt durch den Reifen habe den Radius 1, die „Koordinaten" φ,ψ beschreiben Winkel bezüglich des Zentralkreises und des jeweiligen Querschnittskreises.
Man berechne für $(\varphi,\psi) \in U$ die Ableitung $D(\varphi,\psi)$.
Zusatzaufgabe: berechne den Rang von $D(\varphi,\psi)$.

Aufgabe 2.

a) Die Abbildung $\sin : \left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\to]-1,1[$ ist bijektiv. Die Umkehrabbildung $\left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\to]-1,1[$ heißt $\arcsin(x)$. Mit Hilfe des Satzes über die Umkehrfunktion berechne man $\arcsin'(x)$.

b) Die Abbildung $f : \mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\} \to \mathbb{R}_+^*$, $f(x) := x^n$ $(n \geq 2)$ ist bijektiv. Mit Hilfe des Satzes über die Umkehrfunktion berechne man die Ableitung von $g(x) =: x^{\frac{1}{n}}$.

Aufgabe 3.

Seien $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $I :=]a,b[$, $f : I \to \mathbb{R}$, f differenzierbar.
a) Ist $\forall x \in I : f'(x) > 0$, so ist f monoton steigend, d.h. $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.
b) Ist $\forall x \in I : f'(x) = 0$, so ist f konstant, d.h. $\exists c \in \mathbb{R}\, \forall x \in I : f(x) = c$.

Man kann diese Aussagen direkt aus der Definition der Ableitung oder aus dem Mittelwertsatz herleiten.

Aufgabe 4.

a) Durch direktes Rechnen mit der Exponentialreihe $\exp(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ haben wir gezeigt $\forall z,w\in\mathbb{C}: \exp(z+w):=\exp(z)\exp(w)$ (**Funktionalgleichung** der Exponentialfunktion). Außerdem haben wir für $\varphi\in\mathbb{R}: \exp(i\varphi):=\cos\varphi+i\sin\varphi$. Man rechne nun den Ausdruck $\exp\left(i(\varphi+\psi)\right)$ aus und leite so die sogenannten **Additionstheoreme** für Sinus und Cosinus ab:

$$\cos(\varphi+\psi)=\cos\varphi\cos\psi-\sin\varphi\sin\psi$$
$$\sin(\varphi+\psi)=\sin\varphi\cos\psi+\cos\varphi\sin\psi$$

b) Man wähle „ein beliebiges aber festes“ $x_0\in\mathbb{R}$ und setze $f(x):=\frac{\exp(x)\exp(x_0)}{\exp(x+x_0)}$. Man zeige unter Benutzung der Formel $\exp'(x)=\exp(x)$, dass $\forall x\in\mathbb{R}: f'(x)=0$ und leite so die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion her.