Mathematische Grundlagen der Informatik III, WS 2002/03
Aufgabenblatt 2

Aufgabe 1.

Sei $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ das übliche Skalarprodukt, also $\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.
(Wenn man $\mathbb{R}^{2n}$ als $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ interpretiert, ordnet man die $2n$ Variablen meist so: $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots y_n$)

a) Wieso ist φ nicht linear?
b) Sei $(x^0, y^0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ ein fester Punkt. Man berechne die $(1 \times 2n)$ - Matrix
$A = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x^0, y^0), \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(x^0, y^0), \frac{\partial \varphi}{\partial y_1}(x^0, y^0), \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial y_n}(x^0, y^0) \right)$ der partiellen Ableitungen von φ in (x^0, y^0) und zeige (zum Schluß wird die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung benutzt):

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^{2n} : \quad \left\| \varphi(x, y) - \varphi(x_0, y_0) - A \begin{pmatrix} x - x^0 \\ y - y^0 \end{pmatrix} \right\| \le \left\| x - x^0 \right\| \left\| y - y^0 \right\|$$

(Man beachte, dass $\begin{pmatrix} x - x^0 \\ y - y^0 \end{pmatrix}$ als Element des $\mathbb{R}^{2n}$ interpretiert wird, also als Spaltenvektor mit $2n$ Zeilen.)

Aufgabe 2*

Man bearbeite die zu Aufgabe 1 analoge Aufgabe, wobei jetzt $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^3$ durch das Kreuzprodukt $\varphi(x, y) := x \times y$ gegeben ist . Es ist dann $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix}$ und

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(x_0, y_o) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}(x_0, y_o) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3}(x_0, y_o) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1}(x_0, y_o) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_2}(x_0, y_o) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_3}(x_0, y_o) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}(x_0, y_o) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}(x_0, y_o) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_3}(x_0, y_o) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_1}(x_0, y_o) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_2}(x_0, y_o) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_3}(x_0, y_o) \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_1}(x_0, y_o) & \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_2}(x_0, y_o) & \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_3}(x_0, y_o) & \frac{\partial \varphi_3}{\partial y_1}(x_0, y_o) & \frac{\partial \varphi_3}{\partial y_2}(x_0, y_o) & \frac{\partial \varphi_3}{\partial y_3}(x_0, y_o) \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a) $f(x) = (\sin(x))^5$, b) $f(x) = \exp(x^3 \sin(x))$, c) $f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$.
Durch Anwendung von Differentiationsregeln berechne man jeweils $f'(x)$.

Aufgabe 4

Sei $U := \left]0,\infty\right[\times\left]0,2\pi\right[$ und $\varphi : U \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $\varphi\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} r\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \end{pmatrix}$. Man berechne für $\begin{pmatrix} r_0 \\ \theta_0 \end{pmatrix} \in U$ die Ableitungsmatrix $D\varphi\begin{pmatrix} r_0 \\ \theta_0 \end{pmatrix}$ und zeige unter Nutzung der Formel $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$, dass der Rang dieser Matrix immer 2 ist.

Aufgabe 5

a) Sei φ die Abbildung aus Aufgabe 4, $I = \left]-\pi,\pi\right[$ und $c : I \to \mathbb{R}^2$ die Kurve im $\mathbb{R}^2$, die durch $c(\theta) := \varphi\begin{pmatrix} 1+\cos(\theta) \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta)(1+\cos(\theta)) \\ \sin(\theta)(1+\cos(\theta)) \end{pmatrix}$ gegeben ist.
Wie sieht sie aus? (Man stelle dies ggf. mit Hilfe von Maple, Mathematica, MuPAD o.ä. fest oder hole sich Anregungen, indem man in Google „cardioid equation" eingibt.)

In der Darstellung $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ sind die Komponentenfunktionen c_1, c_2 oben konkret hingeschrieben. Man berechne nun den Tangentialvektor $c'(\theta) = \begin{pmatrix} c_1'(\theta) \\ c_2'(\theta) \end{pmatrix}$ an die Kurve im Punkt $c(\theta)$.

Freiwillige Zusatzaufgaben:

a) Man stelle die obige Kurve und den errechneten Tangentialvektor graphisch dar.
c) Definiert man die Kurve $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ durch $\gamma(\theta) := \begin{pmatrix} 1+\cos(\theta) \\ \theta \end{pmatrix}$, so ist offenbar $c = \varphi \circ \gamma$, also kann man den Tangentialvektor $c'(\theta)$ in einem Punkt $c(t)$ der Kurve c durch Anwendung der Kettenregel $c'(\theta) = D\varphi\left(\gamma(\theta)\right) \circ \gamma'(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial r}(\gamma(\theta)) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta}(\gamma(\theta)) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial r}(\gamma(\theta)) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta}(\gamma(\theta)) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \gamma_1'(\theta) \\ \gamma_2'(\theta) \end{pmatrix}$ berechnen.
Man tue dies und vergleiche das Ergebnis mit dem in a) gewonnenen.