Mathematische Grundlagen der Informatik II, SS 2002
Aufgabenblatt 9

Aufgabe 1.

Zeigen Sie: Die Abbildung $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x):=|x|$ ist stetig in $x_0=0$.

Aufgabe 2.

a) Sei (M,d) ein metrischer Raum und $x_0\in M$. Zeigen Sie: $M-\{x_0\}$ ist offen in *M*.

b) Sei *M* eine Menge und $d(x,y):=\begin{cases}0, & \text{falls } x=y\\ 1, & \text{falls } x\neq y\end{cases}$ die triviale Metrik auf *M*.
Man zeige, dass für die von dieser Metrik erzeugte Topologie gilt: $\mathfrak{O}_d=\mathfrak{P}(M)$.
(Hinweis: man muß nur zeigen, dass die einelementigen Teilmengen von *M* offen sind. Wieso?)

Aufgabe 3.
Sei $\mathfrak{O}=\mathfrak{O}_d$ die von der üblichen Metrik auf $\mathbb{R}$ erzeugte Topologie. Man zeige, dass für die dadurch erzeugte Relativtopologie auf Z, also für $\mathfrak{O}_{\mathbb{Z}}:=\{U\cap\mathbb{Z}\,|\,U\in\mathfrak{O}\}$ gilt: $\mathfrak{O}_{\mathbb{Z}}:=\mathfrak{P}(\mathbb{Z})$.

Aufgabe 4.
Sei $f:M\to N$ eine Abbildung zwischen topologischen Räumen.
Beweisen Sie: *f* ist genau dann stetig, wenn Urbilder offener Mengen in *N* offen in *M* sind.

Aufgabe 5*.
Konstruieren Sie möglichst viele Topologien auf einer 10-elementigen Menge.
(Bemerkung bezüglich der Abgeschlossenheit einer Topologie gegen beliebige Vereinigungen: da hier alles endlich ist, braucht man natürlich nur zu prüfen, ob die Vereinigung zweier offener Mengen offen ist.)

Beachten Sie die „Begriffe und Definitionen zur Topologie“ auf unserer Webseite.