Mathematische Grundlagen der Informatik II, SS 2002
Aufgabenblatt 8

Aufgabe 1.

Sei $A \in M_n(K)$ eine Matrix, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in K$ seien paarweise verschiedene Eigenwerte, $v_1, \ldots, v_k \in K^n$ seien zugehörige Eigenvektoren. Man zeige: $v_1, \ldots, v_k$ sind linear unabhängig.

Aufgabe 2.
Sei $R \in M_n(\mathbb{R})$ eine Rotationsmatrix, also $\forall x, y \in \mathbb{R}^n : < Rx, Ry >=< x, y >$. Man zeige:
a) Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von *R*, so ist $|\lambda| = 1$.
b) Sind $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ zwei verschiedene Eigenwerte von *R* und $v, w \in \mathbb{R}^n$ zugehörige Eigenvektoren, so steht *v* senkrecht auf *w*.

(Hinweis: es ist ganz einfach! Wer es ein wenig schwieriger und interessanter haben will, nehme statt reeller Rotationsmatrizen komplexe unitäre Matrizen, und erinnere sich, dass das komplexe Skalarprodukt durch $< z, w >:= \sum z_i \overline{w}_i$ erklärt ist.)

Aufgabe 3.

Sei $\mu \in K$ n-facher Eigenwert der Matrix $A \in M_n(K)$, d.h. für das charakteristische Polynom von *A* gelte: $\chi_A(\lambda) = (\lambda - \mu)^n$. Man erinnere sich an die Definition der verallgemeinerten Eigenräume $E_\mu^k := \left\{ x \in K^n \,\middle|\, (A - \lambda E)^k (x) = 0 \right\}$, $1 \le k \le n$.

a) Man zeige: Ist $v_{k+1} \in E_\mu^{k+1}$, so gilt $Av_{k+1} = \mu v_{k+1} + v_k$ mit $v_k \in E_\mu^k$. (Einfach!)

b) Konkret: Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & -4 \\ -3 & 5 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$. Man zeige, dass *A* einen 4-fachen Eigenwert μ besitzt und berechne diesen.

Es gilt $E_\mu^4 = \mathbb{R}^4$.

Zeigen Sie $v_4 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_\mu^4 - E_\mu^3$.

Konstruieren Sie jetzt wie in a) die Vektoren v_3, v_2, v_1. v_1, v_2, v_3, v_4 bilden eine Basis des $\mathbb{R}^4$.

Überprüfen Sie nun explizit, dass v_1 ein Eigenvektor zum Eigenwert μ ist . Offenbar besitzt der durch A definierte Homomorphismus bezüglich der Basis v_1, v_2, v_3, v_4 die besonders einfache Darstellung $\begin{pmatrix} \mu & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$.

Überprüfen Sie dies, indem Sie mit der Basiswechselmatrix $B := (v_1, v_2, v_3, v_4)$ die transformierte Matrix $B^{-1}AB$ berechnen.

Aufgabe 4.
Rechnungen wie in Aufgabe 3. lassen sich am besten mit Hilfe eines Computeralgebrasystems durchführen. Zur Auswahl stehen Mathematica, Maple, MuPAD. MuPAD wird mit den aktuellen Linux-Distributionen ausgeliefert, ist auf den Universitätsrechnern verfügbar, man kann die „Light“-Version für Windows umsonst nutzen. (Die für Studenten sehr preisgünstige „Pro“-Version verfügt über ein besser in Windows integriertes GUI.)

Lernen Sie soviel wie möglich mit und über MuPAD! (www.mupad.de)