Mathematische Grundlagen der Informatik II, SS 2002
Aufgabenblatt 1

Aufgabe 1

a) M,N seien Mengen, $|M| =$ Elementezahl von $M = m$, $|N| = n$.
Man definiert $M^N := \{ f \mid f : N \to M \}$. Zeige durch Induktion: $|M^N| = m^n$

b)* M sei eine Menge.

α) Finde eine bijektive Abbildung $\mathfrak{P}(M) \to \{0,1\}^M$!
(d.h. man gebe eine solche Abbildung an und zeige dann, dass sie bijektiv ist).
Wieviel Elemente hat also $\mathfrak{P}(M)$, wenn M endlich ist?

β) Finde eine bijektive Abbildung $M \times M \to M^{\{0,1\}}$.

γ) Man erinnere sich der Binomialkoeffizienten $\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$ und der für sie geltenden rekursiven Formeln $\binom{m}{0} = \binom{m}{1} = 1$, $\binom{m}{n} + \binom{m}{n+1} = \binom{m+1}{n+1}$.

Seien nun wieder M eine Menge, $|M| = m$, $n \le m$.

Man zeige: $\binom{m}{n}$ ist die Anzahl der n-elementigen Teilmengen von M. Wie groß ist also die Anzahl der 6-elementigen Teilmengen einer 49-elementigen Menge?

Aufgabe 2

Sei R ein kommutativer Ring. Man beweise (durch Induktion) die binomische Formel
$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$.

Aufgabe 3

a) Bilde das Produkt der beiden folgenden Matrizen in $M_5(\mathbb{Z}_{10})$

$$\begin{pmatrix} 7 & 9 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 7 & 5 \\ 8 & 1 & 6 & 3 \\ 4 & 2 & 5 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 5 \\ 7 & 3 & 9 & 2 \\ 9 & 8 & 5 & 1 \\ 5 & 7 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

b) Finde eine Matrix $A \in M_4(\mathbb{Z})$, für die gilt $A^4 = 0$, $A^3 \neq 0$.
(Mit „0“ ist hier die Nullmatrix gemeint)

Aufgabe 4

Sei M eine Menge. Auf der Potenzmenge $\mathfrak{P}(M)$ definiere man die folgenden Operationen

$$A + B := A \cup B - \left(A \cap B\right)$$
$$A \cdot B := A \cap B$$

Man zeige: mit den Operationen „+, $\cdot$“ ist $\mathfrak{P}(M)$ ein kommutativer Ring mit Eins.