Mathematische Grundlagen der Informatik II, SS 2002
Aufgabenblatt 11

Aufgabe 1.

Konstruieren Sie eine Folge reller Zahlen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, für die gilt:
$x\in\mathbb{R}$ Häufungspunkt von $(x_n) \Leftrightarrow x\in\mathbb{N}$.

Aufgabe 2.

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge positiver reeller Zahlen.

Betrachte die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i+1}x_i$ (eine Reihe mit abwechselnd positiven und negativen Summanden heißt *alternierend*).

Man zeige: Die Partialsummenfolge (s_{2n}) ist monoton steigend, und die Partialsummenfolge (s_{2n-1}) ist monoton fallend und $s_{2n}\le s_{2n-1}$.

(Da auch $s_{2n-1}-s_{2n}\to 0$, besitzt die Folge (s_n) genau einen Häufungspunkt: daher ist die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i+1}x_i$ konvergent.)

Aufgabe 3.

Man berechne den Konvergenzradius der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5^n(n+7)}{(n^2+n+1)}\,z^n$.

Aufgabe 4.

Wir haben mit Hilfe des Quotientenkriteriums gezeigt, dass die Exponentialreihe $\exp(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$ für alle $z\in\mathbb{C}$ absolut konvergiert. Man setze nun $z:=it$ mit $t\in\mathbb{R}$ in die Potenzreihe ein. Es ergibt durch Ausrechnen der Real- und Imaginärteile $\sum_{n=0}^{\infty}(u_n+iv_n)\,t^n=\sum_{n=0}^{\infty}u_nt^n+i\sum_{n=0}^{\infty}v_nt^n$. Man bestimme die reellen Koeffizienten $(u_n),(v_n)$.

Aufgabe 5*.

Sei $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge positiver reeller Zahlen; es sei $\sum_{i=1}^{\infty} x_i = a$. Sei $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ eine beliebige Abbildung. Man setze $y_i := x_{\varphi(i)}$ und zeige durch direkte Überprüfung der Grenzwertdefinition, dass auch $\sum_{i=1}^{\infty} y_i = a$.