

Blatt 12

bitte heften Sie dieses Blatt vor Ihre Lösungen

Namen				Gruppe	Tutor
1	2	3a	b	Summe	bearbeitet
1	1	1	1	2 Pkte=100%	

Aufgabe 1

In der analytischen Zahlentheorie ist die von Mangoldt-Funktion Λ eine häufig benutzte Hilfsgröße:

$$\Lambda(n) := \begin{cases} \log p & \text{falls } n = p^\alpha \text{ für ein } \alpha \geq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Man erinnere sich an die "zahlentheoretischen Funktionen" und zeige $\sum_{d|n} \Lambda(d) = \log n$.

Aufgabe 2

Ausgehend von der Darstellung der ζ -Funktion als unendliches Produkt zeige man für

$$s \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} s > 1 : \frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\mu(n)}{n^s}. \text{ Dabei ist } \mu \text{ die Möbius-Funktion.}$$

Aufgabe 3

Ein wesentlicher Satz für durch Parameterintegrale definierte holomorphe Funktionen lautet:

Ist (Ω, μ) ein Maßraum mit einem positiven Maß, $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $F : \Omega \times G \rightarrow \mathbb{C}$ eine Abbildung mit folgenden Eigenschaften: $\forall t \in \Omega : F_t : G \rightarrow \mathbb{C}$ ist holomorph, $\forall z \in G : F_z : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ist meßbar, und es gibt eine μ -integrierbare Funktion $G : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, so daß $\forall t \in \Omega, z \in G : |F(t, z)| \leq G(t)$, so ist die durch $z \rightarrow \int_{t \in \Omega} F(t, z) d\mu(t)$ auf G definierte Funktion holomorph.

a) Benutzen Sie diesen Satz und zeigen Sie für $\delta > 0$ und $G := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > \delta\}$, daß auf G durch

$$f(z) := \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \text{ eine holomorphe Funktion definiert wird.}$$

b) Berechnen Sie $f(1)$ und zeigen Sie für $n \in \mathbb{N} : f(n+1) = n \cdot f(n)$.