Mathematik I, Logik und Algebra, WS2011/12
M. Hortmann

Blatt 2

Aufgabe 3
Seien x, y, z, w Mengen. Man zeige:
a) Wenn $\{x\}=\{y,z\}$, dann $x=y$.
Wenn $\{\{x\},\{x,y\}\}=\{\{z\},\{z,w\}\}$, dann b) $x=z$ und c) $y=w$.

Vorbemerkung: Ist $M:=\{x \mid E(x)\}$, so heißt dies gerade $(\forall x)(x \in M \leftrightarrow E(x))$. Nun ist $\{x,y\}=\{z \mid z=x \vee z=y\}$, also $z \in \{x,y\} \leftrightarrow (z=x \vee z=y)$; da $\{x\}=\{z \mid z=x\}$ gilt $z \in \{x\} \leftrightarrow z=x$.

ad a)
Sei $\{x\}=\{y,z\}$. Wegen $y \in \{y,z\}$ folgt $y \in \{x\}$. Dies ist aber äquivalent zu $y=x$, also gilt $y=x$.

ad b)
Es ist $\{z\} \in \{\{z\},\{z,w\}\} \subset \{\{x\},\{x,y\}\}$, also $\{z\}=\{x\}$ oder $\{z\}=\{x,y\}$.
Im ersten Fall folgt $z \in \{x\}$, also $z=x$, im zweiten Fall folgt wegen a) ebenfalls $z=x$, insgesamt also jedenfalls $z=x$.

ad c) Wegen b) wissen wir bereits, daß $\{\{x\},\{x,y\}\}=\{\{x\},\{x,w\}\}$. Daher ist $\{x,w\}=\{x\}$ oder $\{x,w\}=\{x,y\}$.

Im Fall $\{x,w\}=\{x\}$ folgt zunächst wegen a) $x=w$; da dann $\{\{x\},\{x,y\}\}=\{\{x\}\}$ folgt gemäß a) $\{x,y\}=\{x\}$, also $y \in \{x\}$, also $y=x$ und damit $y=w$.

Im Fall $\{x,w\}=\{x,y\}$ ist $y \in \{x,w\}$ und damit $y=x$ oder $y=w$. Wäre $y=x$, so hätte man $\{x,w\}=\{y\}$, also nach a) $y=w$.

In jedem Fall folgt also $y=w$.