Mathematik I, Logik und Algebra, WS2011/12
M. Hortmann

Blatt 2 – Aufgabe 2

Seien A, B Mengen.
Zeigen Sie, dass die Aussage $A \subset B$ äquivalent ist zu den Aussagen

a) $A \subset (A \cap B)$

b) $(A \cup B) \subset B$

Lösung (*von Marie van Amelsvoort*)

a) zu zeigen: $A \subset B \Leftrightarrow A \subset (A \cap B)$

Zunächst die Hinrichtung („$\Rightarrow$“):

$$\begin{aligned} A \subset B &\Rightarrow x \in A \to x \in B \\ &\overset{(1)}{\Rightarrow} (x \in A \to x \in A) \wedge (x \in A \to x \in B) \\ &\Rightarrow x \in A \to (x \in A \wedge x \in B) \\ &\Rightarrow x \in A \to (x \in (A \cap B)) \\ &\Rightarrow A \subset (A \cap B) \end{aligned}$$

zu (1): Die Aussage $x \in A \to x \in A$ ist immer wahr, sie kann ohne weiteres durch die Verknüpfung „$\wedge$“ hinzugefügt werden

Nun die Rückrichtung („$\Leftarrow$“):

$$\begin{aligned} A \subset (A \cap B) &\Rightarrow x \in A \to (x \in (A \cap B)) \\ &\Rightarrow x \in A \to (x \in A \wedge x \in B) \\ &\Rightarrow (x \in A \to x \in A) \wedge (x \in A \to x \in B) \\ &\overset{(2)}{\Rightarrow} x \in A \to x \in B \\ &\Rightarrow A \subset B \end{aligned}$$

zu (2): Der Ausdruck ((wahr) $\wedge$ X) nimmt immer den Wahrheitswert von X an.

b) zu zeigen: $A \subset B \Leftrightarrow (A \cup B) \subset B$

$$\begin{aligned} A \subset B &\Leftrightarrow x \in A \to x \in B \\ &\Leftrightarrow (x \in A \to x \in B) \wedge (x \in B \to x \in B) \\ &\overset{(3)}{\Leftrightarrow} (x \in A \vee x \in B) \to x \in B \\ &\Leftrightarrow (x \in (A \cup B)) \to x \in B \\ &\Leftrightarrow (A \cup B) \subset B \end{aligned}$$

zu (3): Beim Zusammenfassen wird aus dem „$\wedge$“ ein „$\vee$“ und andersrum, dies kann durch eine Wahrheitstabelle überprüft werden.