Wohlordnung der natürlichen Zahlen

Zunächst die Definition:
Eine total geordnete Menge heißt **wohlgeordnet**, wenn jede nicht leere Teilmenge ein kleinstes Element besitzt.

Ist also (M, $\leq$) unsere geordnete Menge und $\emptyset \neq K \subset M$, so gibt es ein $x \in K$, so daß $\forall\, y \in K : x \leqslant y$.

Die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen mit der üblichen Ordnung ist nicht wohlgeordnet, denn sie besitzt selbst kein kleinstes Element. Die Menge der nicht-negativen rationalen Zahlen $\mathbb{Q}_+ = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geqslant 0\}$ mit der üblichen Ordnung ist nicht wohlgeordnet, denn die Teilmenge $\mathbb{Q}_+^* = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$ besitzt kein kleinstes Element.

Satz: Die Menge der natürlichen Zahlen mit der üblichen Ordnung ist wohlgeordnet.

Indirekter Beweis:
Nehmen wir an, sie sei es nicht. Dann gibt es eine Teilmenge $\emptyset \neq K \subset \mathbb{N}$, welche kein kleinstes Element besitzt.

Bilden wir die Menge $L := \mathbb{N} \setminus K$.
Wäre $1 \in K$, so wäre 1 zweifellos das kleinste Element von K. Also ist $1 \notin K$, also $1 \in L$.

$E(n)$ sei die folgende Eigenschaft: $\forall\, m \in \mathbb{N} : m \leqslant n \rightarrow m \in L$. Offenbar folgt $n \in L$ aus E(n).
Weil $1 \in L$ gilt auch E(1).

Wenn wir für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ zeigen können, daß $E(n) \Rightarrow E(n+1)$, so haben wir per Induktion gezeigt, daß $\forall\, n \in \mathbb{N} : E(n)$, also $L = \mathbb{N}$. Dann wäre aber doch $K = \emptyset$, und wir hätten einen Widerspruch.

Sei daher $n \in \mathbb{N}$ beliebig vorgegeben und es gelte $E(n)$, also $\forall\, m \in \mathbb{N} : m \leqslant n \rightarrow m \in L$
Wenn wir zeigen wollen, daß dann auch $E(n+1)$, also $\forall\, m \in \mathbb{N} : m \leqslant n+1 \rightarrow m \in L$ gilt, brauchen nur noch $n+1 \in L$ zu zeigen.

Wäre $n+1 \notin L$, also $n+1 \in K$, so folgte sofort $\forall\, m \in K : n+1 \leqslant m$, denn sonst gäbe es ein $m \in K$ mit $m < n+1$, also $m \leqslant n$, wir wissen aber wegen $E(n)$, daß alle Elemente $m \leqslant n$ in L liegen. Damit wäre nun aber n+1 kleinstes Element von K, im Widerspruch zur Voraussetzung, daß K kein kleinstes Element besitzt.

Der sogenannte **Wohlordnungssatz** besagt: Auf jeder Menge gibt es eine Wohlordnung.

Diesen Satz der Mengenlehre beweist man mit Hilfe des **Auswahlaxioms**, welches wir bisher nicht kennengelernt haben.

Offenbar ist jede Teilmenge einer wohlgeordneten Menge wohlgeordnet.

Eine abzählbar unendliche Menge M ist dadurch charakterisiert, daß es eine bijektive Abbildung $f : \mathbb{N} \rightarrow M$ gibt. Definiert man jetzt für $m, n \in M$ $\; m \leqslant n :\Leftrightarrow f^{-1}(m) \leqslant f^{-1}(n)$, so hat man damit die Wohlordnung von den natürlichen Zahlen auf M hinübertransportiert. Da man konkrete bijektive Abbildungen $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ und $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ kennt, kann man auch konkrete Wohlordnungen auf $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ angeben. Eine Wohlordnung auf $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ ist dann schon schwieriger zu konstruieren.