Aussagen, Bemerkungen und Ergänzungen zur Mengenlehre

M. Hortmann

Gibt es überhaupt Mengen?
Genauso könnte man fragen: Gibt es überhaupt Zahlen?

Bei den Zahlen haben wir uns angewöhnt, mit ihnen zu umzugehen, ohne ihre Existenz weiter zu problematisieren. Bei der Herleitung von mathematischen Aussagen gehen wir aus von gewissen elementaren Eigenschaften und Beziehungen der betrachteten Objekte – den sogenannten Axiomen – und versuchen, komplexere Eigenschaften und Operationen aus diesen logisch abzuleiten.

Naïve Mengenlehre
Zu vielen mathematischen Gegenständen gibt es "naïve" Definitionen, z.B. sagt Euklid: „Ein Punkt ist, was keinen Teil hat". Cantor definierte: „Eine Menge ist eine Zusammenfassung bestimmter und wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen; diese Objekte heißen Elemente der Menge."

Man schreibt $a \in M$, um auszudrücken, daß das Objekt a Element der Menge M ist. Häufig benutzt man kleine Buchstaben zur Bezeichnung der Objekte und große zur Bezeichnung der Mengen, deren Elemente die gegebenen Objekte sind. Es erweist sich aber als sinnvoll, nicht zwischen "Objekten" und "Mengen" zu unterscheiden, d.h. die Objekte, mit denen wir es in der Mathematik zu tun haben, lassen sich immer selbst als Mengen auffassen, und es kommt dann eben häufig vor, daß eine Menge ein Element einer anderen Menge ist.

Die Cantorsche Mengendefinition führt zum sogenannten **Extensionalitätaxiom:**

Zwei Mengen M,N sind genau dann gleich, wenn sie dieselben Elemente enthalten. Formal kann man das so ausdrücken: $(M=N) \quad \Leftrightarrow \quad \big((\forall x) \ \ ((x \in M) \ \leftrightarrow \ (x \in N))\big)$ [1].

Man definiert den Begriff der **Teilmenge**: Eine Menge M ist Teilmenge einer Menge N, wenn jedes Element von M auch Element von N ist. Man schreibt dann: $M \subset N$ oder auch $N \supset M$ und nennt M auch Untermenge von N und N Obermenge von M.

Damit erhält das Extensionalitätsaxiom die Form $(M=N) \quad \Leftrightarrow \quad \big((M \subset N) \ \wedge \ (N \subset M)\big)$, d.h. zwei Mengen sind genau dann gleich, wenn die eine Teilmenge der anderen ist, und umgekehrt.

Kürzen wir die Aussage „Das Objekt x besitzt die Eigenschaft[2] E" bzw. „die Eigenschaft E trifft auf das Objekt x zu" ab durch die Schreibweise $E(x)$. $E(x)$ ist also eine Aussage, die abhängig von der zur Debatte stehenden Eigenschaft und dem gewählten Objekt x wahr oder falsch ist. Nach der Cantorschen Definition müßte es erlaubt sein, zu einer gegebenen Eigenschaft E die Menge derjenigen Objekte zu bilden, auf die E zutrifft. Für diese Menge benutzt man die Notation $\{x | E(x)\}$. Mit $M := \{x | E(x)\}$ hat man demnach $(\forall x)\big((x \in M) \leftrightarrow (E(x))\big)$.

Russell zeigte 1903, daß man nicht zu jeder Eigenschaft auf diese Weise eine sinnvolle Menge bilden kann und löste so die (fruchtbare) Grundlagenkrise der Mathematik aus:

---

1 Es wird das Zeichen $\Leftrightarrow$ benutzt als Abkürzung für das umgangssprachliche „genau dann, wenn". Das Zeichen $\leftrightarrow$ bedeutet letztlich dasselbe, ist aber im Kontext logischer Verknüpfungen über eine Wahrheitstafel definiert.

2 Man kann syntaktisch genau präzisieren, was eine Eigenschaft ist. Wir erlauben uns, hier etwas informell zu bleiben, um nicht zu weit abzuschweifen.

Die Russellsche Antinomie
Wäre es erlaubt, die Menge $R:=\{x | x\notin x\}$ [3] zu bilden, dann hätte man: $(\forall x)((x\in R)\leftrightarrow(x\notin x))$.
Wählt man jetzt speziell $x=R$, so ergibt sich $(R\in R)\leftrightarrow(R\notin R)$, und dies ist ein Widerspruch!

Aussonderungsaxiom
Dieser Widerspruch läßt sich auflösen, wenn "wilde" Mengenbildungen wie die obige nicht erlaubt werden. Man schränkt das Mengenbildungsaxiom so ein, daß man nur Teilmengen bereits gegebener Mengen bilden („aussondern") darf:

> Ist A eine Menge und E eine Eigenschaft, so gibt es eine eindeutig bestimmte Teilmenge $B\subset A$ mit $\forall x\in B: E(x)$. Damit ist also die Mengenbildung $B:=\{x | x\in A\wedge E(x)\}=\{x\in A | E(x)\}$ erlaubt, mit anderen Worten: man darf man die Teilmenge derjenigen Elemente von A bilden, auf die E zutrifft.

Die Russellsche Menge R läßt sich jetzt nicht mehr definieren!
Geht man z.B. von einer gegebenen Menge A aus, setzt $R_A:=\{x\in A | x\notin x\}$ und nimmt an, daß $R_A\in R_A$, so folgt nach Definition der Menge R_A daß $R_A\in A$ und $R_A\notin R_A$, also $R_A\notin R_A$. Die Aussage $R_A\in R_A$ muß daher falsch ein und deshalb $R_A\notin R_A$ gelten. Nach Definition der Menge R_A folgt jetzt $\neg((R_A\in A)\wedge(R_A\notin R_A))$. Dies ist tautologisch äquivalent zu $(R_A\notin A)\vee(R_A\in R_A)$. Weil man bereits weiß, daß $R_A\in R_A$ falsch ist, ergibt sich $R_A\notin A$. Dies ist aber eine völlige „harmlose" Aussage und kein Widerspruch.

Es werden weitere Axiome benötigt, um in der Mathematik übliche Mengenkonstruktionen durchführen zu können, die durch das Aussonderungsaxiom allein nicht gedeckt sind; wir führen hier nur einige auf und verweisen im übrigen auf Bücher oder Online-Ressourcen über „Axiomatische Mengenlehre"[4].

> **Existenzaxiom**: Es gibt eine Menge[5]!

Auf einer einzigen Menge aufbauend, lassen sich alle weiteren in der Mathematik benötigten Mengen konstruieren, z.B.

Die leere Menge
Es gibt eine eindeutig bestimmte Menge, deren Elementezahl 0 ist! Ihre Existenz und Eindeutigkeit können wir jetzt beweisen: Ist nämlich M eine Menge, die es nach dem Existenzaxiom geben muß, so können wir mit Hilfe des Aussonderungsaxioms die Menge $\emptyset_M:=\{x\in M | x\neq x\}$ als Teilmenge von M bilden. $\emptyset_M$ enthält offenbar kein Element. Die leere Menge $\emptyset_M$ scheint zunächst von M abzuhängen. Gäbe es aber noch eine andere Menge L, die keine Elemente besitzt, so folgt leicht die Mengenidentität $\emptyset_M=L$. Dazu ist nämlich für jedes x zu zeigen: $x\in\emptyset_M\leftrightarrow x\in L$. Da die Aussagen auf beiden Seiten von $\leftrightarrow$ jedenfalls falsch sind, ist diese logische Äquivalenzbeziehung wahr. Es gibt also nur eine einzige Menge ohne Elemente, und sie erhält die Bezeichnung $\emptyset$.

Die leere Menge ist Teilmenge jeder Menge! Das liegt daran, daß die Implikation $x\in\emptyset\rightarrow x\in M$ immer wahr ist, weil ja die Prämisse $x\in\emptyset$ immer falsch ist!

Letztlich lassen sich alle für die Mathematik relevanten Mengen aus der leeren Menge konstruieren!

---

3 $E(x)$ ist hier also konkret gleich $x\notin x$.
4 Siehe z.B. http://de.wikipedia.org/wiki/Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre
5 Wir werden später sehen, daß dies nicht ausreicht, um z.B. die natürlichen Zahlen zu konstruieren; benötigt wird eigentlich eine unendliche Menge. Wir können aber den Unendlichkeitsbegriff erst später vernünftig formulieren, wenn der Abbildungsbegriff zur Verfügung steht.

Durchschnitt und Vereinigung und Differenzmenge
Sind Mengen *M* und *N* gegeben, so möchten wir die Menge $M \cup N := \{x \mid (x \in M) \vee (x \in N)\}$ bilden, die sogenannte Vereinigungsmenge von *M* und *N*. Dies ist mit Hilfe des Aussonderungsaxioms nur dann möglich, wenn beide Mengen Teilmenge einer gemeinsamen Obermenge sind, wovon man zunächst nicht ausgehen kann.

Dagegen ist die Durchschnittsmengenbildung $M \cap N := \{x \mid (x \in M) \wedge (x \in N)\}$ durch das Aussonderungsaxiom gerechtfertigt, denn wir konstruieren ja nur eine Teilmenge einer bereits gegebenen Menge, ebenso wie bei der Differenzmengenbildung $M \setminus N := \{x \mid (x \in M) \wedge (x \notin N)\}$, bei der man die Menge derjenigen Elemente von *M* bildet, die nicht in *N* liegen.

Vereinigungsmengenaxiom

Eine allgemeinere Art von Vereinigungsbildung besteht darin, daß man die Elemente aller Elemente von *M* betrachtet und zu einer Menge zusammenfaßt, die die Bezeichnung $\cup M$ erhält. Es ist also $\cup M = \{x \mid \exists y \in M: \; x \in y\}$, und die Existenz von $\cup M$ wird axiomatisch gefordert.

Beispiel: Für $M = \{\{1,2,3\}, \{3,4,5\}\}$ gilt $\cup M = \{1,2,3,4,5\}$.

In ähnlicher Weise definiert man für eine nicht leere Menge *M* den Durchschnitt all ihrer Elemente $\cap M := \{x \mid \forall y \in M : x \in y\}$. Dies ist also die Menge derjenigen Objekte, die in allen Elementen von *M* als Elemente enthalten sind. Da $M \neq \emptyset$, gibt es ein Element $A \in M$, und man sieht, daß $\cap M := \{x \in A \mid \forall y \in M : x \in y\}$. Die Existenz von $\cap M$ ist also bereits durch das Aussonderungsaxiom gesichert.
Beispiel: Ist wieder $M = \{\{1,2,3\}, \{3,4,5\}\}$, so gilt $\cap M = \{3\}$.

Zweiermengenaxiom: Sind *M*,*N* Mengen, so gibt es eine eindeutig bestimmte Menge, deren einzige Elemente *M* und *N* sind. Diese Menge bezeichnet man mit $\{M, N\}$

Beim Zweiermengenaxiom ist der Fall *M*=*N* durchaus erlaubt: man erhält die „Einermenge" $\{M\}$.

Offenbar ist $\cup\{M, N\} = M \cup N$. Man benötigt das Vereinigungsmengenaxiom also nur für die Konstruktion von $\cup M$ und nicht für die von $M \cup N$.

Potenzmengenaxiom:
Eine weitere wichtige Mengenkonstruktion, deren Möglichkeit man axiomatisch fordern muß, ist die der Potenzmenge einer Menge *M*, d.h. der Menge aller ihrer Teilmengen. Man bezeichnet diese mit $\wp(M)$, und es ist demnach $\wp(M) = \{K \mid K \subset M\}$.

Beispiel: Für $M = \{1, 2, 3\}$ ist $\wp(M) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$.

Die Potenzmenge einer dreielementigen Menge besitzt also 8 Elemente; die Potenzmenge einer vierelementigen Menge besitzt 16 Elemente, etc. Natürlich muß man die leere Menge als Element jeder Potenzmenge mitberücksichtigen!

Mengenalgebra
Für Durchschnitt und Vereinigung gelten quasi algebraische Regeln.

Sind *M,N,K* Mengen, so gelten
$M \cup N = N \cup M$, $M \cap N = N \cap M$ Kommutativgesetze
$M \cup (N \cup K) = (M \cup N) \cup K$, $M \cap (N \cap K) = (M \cap N) \cap K$ Assoziativgesetze
$M \cup (N \cap K) = (M \cup N) \cap (M \cup K)$, $M \cap (N \cup K) = (M \cap N) \cup (M \cap K)$ Distributivgesetze

Für $M \subset K$ setzen wir $\overline{M} := K - M := \{x \in K \mid x \notin M\}$;
sind $M, N \subset K$, so gelten „die de Morganschen Regeln": $\overline{M \cup N} = \overline{M} \cap \overline{N}$, $\overline{M \cap N} = \overline{M} \cup \overline{N}$.

Man erkennt eine „Dualität" von Durchschnitt und Vereinigung. Man kann in jeder der obigen Formeln Durchschnitt durch Vereinigung und umgekehrt ersetzen.

Ein Modell der natürlichen Zahlen in der Mengenlehre

Ist *M* eine Menge, so kann man die Menge $S(M) := M \cup \{M\}$ bilden. Offenbar gilt sowohl $M \in S(M)$ wie $M \subset S(M)$.

Beginnen wir mit $M = \emptyset$ und konstruieren $S(M), S(S(M)), S(S(S(M)))$, etc. , so erhalten wir:

$\emptyset$
$\{\emptyset\}$
$\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$
$\{\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$
etc.

Man sieht, daß die erste dieser Mengen 0 Elemente enthält, die zweite 1 Element, die dritte 2 Elemente, etc.

Wir könnten die Folge eine Weile weiterschreiben, im Prinzip bis zu jeder beliebigen Grenze und darüber hinaus, aber zu keinem Zeitpunkt sind wir mit dem Aufzählungsprozeß fertig. Jede der obigen Mengen ist endlich, keine ist unendlich.

Man nennt eine Menge *M* "induktiv", wenn gilt:
1. $\emptyset \in M$ und
2. Wenn $K \in M$ dann auch $S(K) \in M$.

Wenn es eine induktive Menge *M* gibt, so sieht man sofort, daß jede der oben hingeschriebenen Mengen Element von M ist.

Damit ist klar, daß eine induktive Menge unendlich viele Elemente besitzen muß. Der Begriff "unendlich" wird später noch präzisiert. Man kann dann auch zeigen, daß aus der Existenz einer unendlichen Menge die Existenz einer induktiven Menge folgt.