Ein maximales Ideal in den Gaußschen Zahlen

Der Ring der Gaußschen G Zahlen besteht aus denjenigen komplexen Zahlen, welche einen ganzzahligen Realteil und Imaginärteil besitzen.

Offenbar ist $\mathbb{Z} \subset G$.

Die Einheitengruppe von G besteht gerade aus den Elementen 1, -1 , i , $-i$.

Wichtig ist die Abbildung $N: G \rightarrow \mathbb{N}_0$, die sogenannte Normabbildung, für welche gilt: $\forall\, x, y \in G$: $N(xy)=N(x)N(y)$. Mit Hilfe dieser Abbildung können wir Teilbarkeitsfragen von G nach $\mathbb{Z}$ transportieren. Für alle Einheiten in G ist die Norm gleich 1, und für alle Nicht-Einheiten ist sie größer als 1. Das einzige Element, dessen Norm gleich Null ist, ist die Null selbst.

Die Gaußsche Zahl $p=1+2i$ unzerlegbar, d.h. nicht als Produkt von Nicht-Einheiten darstellbar. Dies sieht man mit Hilfe der Norm so: Wäre $p=r \cdot s$, wobei $r, s \in G$ Nicht-Einheiten sind, so hätte man $5=N(p)=N(r)N(s)$. Weil aber 5 Primzahl in $\mathbb{Z}$ ist, muß $N(r)$ oder $N(s)$ gleich 1 sein, und daher doch r oder s eine Einheit.

Sei jetzt $z=x+iy$ eine beliebige Gaußsche Zahl. Wir können feststellen, ob z ein Vielfaches von p ist, also ob $z \in \langle p \rangle$ indem wir eine komplexe Division durchführen:
$\frac{x+iy}{1+2i}=\frac{(x+iy)(1-2i)}{1^2+2^2}=\frac{x^2+2y^2}{5}+i\,\frac{-2x+y}{5}=:u+iv=:w$. Sind der Realteil u und der Imaginärteil v auf der rechten Seite ganze Zahlen, so ist $w \in G$ und es gilt: $z=pw$.

Wir betrachten jetzt den Restklassenkörper $K:=G/\langle p \rangle$. Seine Elemente sind die Äquivalenzklassen der Äquivalenzrelation $z \sim w :\Leftrightarrow x-y \in \langle p \rangle$.

Wir werden später zeigen, daß es genau *5* verschieden Äquivalenzklassen gibt, daß also der Körper K 5 Elemente besitzt.

Weil die Elemente 0,1,2,3,4 alle in verschiedenen Äquivalenzklassen liegen, folgt:
$K=\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}$.

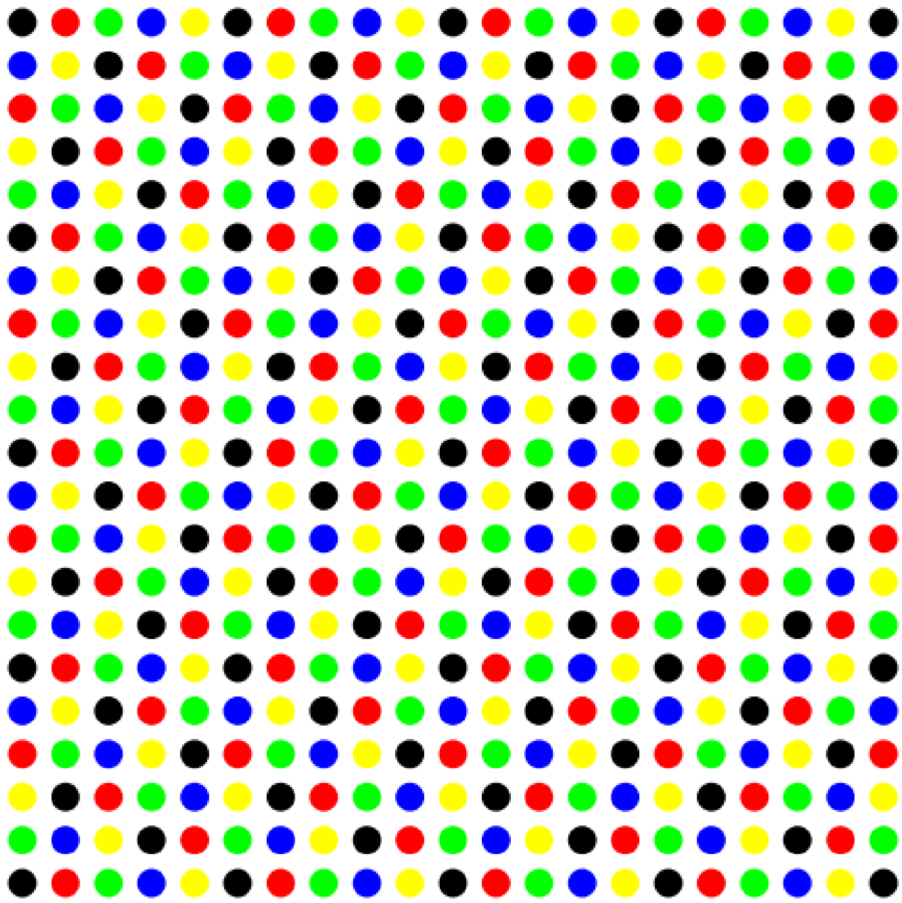
Addition und Multiplikation in K erfolgen wie in setZ_5:
Z.B. gilt ja in $\mathbb{Z}_5$: $3 \cdot 4=2$. Andererseits gilt auch in K: $\overline{3} \cdot \overline{4}=\overline{2}$: dazu muß nachgewiesen werden: $3 \cdot 4 \sim 2$, also $3 \cdot 4-2 \in \langle p \rangle$; dies ist aber offenbar richtig, denn $10=(2-2i)(1+2i)=(2-2i) \cdot p$

Nun ist auch $\langle p \rangle \ni (-i) \cdot (1+2i)=2-i$, so daß $2 \sim i$, und damit $\overline{2}=\overline{i}$.
Ähnlich ergibt sich $\langle p \rangle \ni (-1+i) \cdot (1+2i)=-i-3$, so daß $-i \sim 3$ und damit $\overline{3}=\overline{-i}$.
Schließlich ist $\langle p \rangle \ni (1-2i) \cdot (1+2i)=5=4-(-1)$, so daß 4 ~ -1 und damit $\overline{4}=\overline{-1}$.

Man könnte daher genausogut schreiben:
$K=\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{-1}, \overline{i}, \overline{-i}\}$.

In der Vorlesung wurde K so geschrieben:
$K=\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{1+i}, \overline{1-i}, \overline{2}\}$; dies ist richtig, weil man leicht sieht, daß: $1+i \sim -i$ und $1-i \sim -1$.

Man kann nun nachrechnen, zu welcher Äquivalenzklasse eine beliebige Gaußsche Zahl gehört. Zur graphischen Darstellung eignen sich Farbcodierungen: wir färben eine Gaußsche Zahl schwarz, wenn sie äquivalent zu Null ist; rot, wenn sie äquivalent zu 1 ist; grün, wenn sie äquivalent zu 2 ist; blau, wenn sie äquivalent zu 3 und gelb, wenn sie äquivalent zu 4 ist. Es ergibt sich folgendes Bild:



Dargestellt sind die Gaußschen Zahlen mit Realteil und Imaginärteil zwischen -10 und 10.
Der schwarze Kreis genau in der Mitte ist demnach der Nullpunkt.

Man sieht jetzt, daß die Punkte 0, 1 , -1, i , $-i$ verschieden gefärbt sind, ebenso wie 0 , 1 , $1+i$, $1-i$, 2 bzw. 0, 1, 2 , 4, 5.

Grundsätzlich: gleiche Farbe, gleiche Äquivalenzklasse.

Wie können wir nun von einer beliebigen Gaußschen Zahl $x+i\,y$ feststellen, wie sie einzufärben ist?
Wie oben führen wir eine komplexe Division durch:

$$\frac{x+i\,y}{1+2i}=\frac{(x+i\,y)(1-2i)}{1^2+2^2}=\frac{x^2+2y^2}{5}+i\,\frac{-2x+y}{5}=:u+i\,v=:w$$

Diesmal kann nicht davon ausgegangen werden, daß u und v ganze Zahlen sind. Jedoch liegt die komplexe Zahl w innerhalb eines quadratischen Kästchens der Kantenlänge 1, dessen Eckpunkte Gaußsche Zahlen sind. Der größtmögliche Abstand zu einem solchen Eckpunkt würde offenbar genau dann auftreten, wenn $u+i\,v=w$ genau in der Mitte eines Kästchens liegt. Dieser größtmögliche Abstand ist dann also kleiner oder gleich der halben Länge der Diagonale eines Kästchens, und diese Länge ist kleiner als 1. Wir haben also:

$z=(x+iy)=w(1+2i)=(w_0+r_0)(1+2i)=w_0(1+2i)+r_0(1+2i)$, wobei w_0 eine Gaußsche Zahl ist und $|r_0|<1$. Setzen wir $r:=r_0(1+2i)$, so folgt $|r|=|r_0||1+2i|<|1+2i|$.

Daher ist $z-w_0(1+2i)$ eine Gaußsche Zahl, die dem Betrage nach kleiner als $|1 + 2i|$ ist, und diese Zahl ist offenbar äquivalen zu z !

Von solchen Zahlen gibt es aber nicht viele: Es kommen nur in Frage: 0 , 1, i , $-i$, $1+i$, $1-i$, $-1+i$, $-1-i$. Damit ist z äquivalent zu einer dieser 8 Gaußschen Zahlen. Von den ersten 6 wissen wir bereits, wie sie einzufärben sind, und wegen $-1+i \sim 1$ und $-1-i \sim i$ wird $-1+i$ rot und $-1-i$ grün.

Jede Gaußsche Zahl gehört also zu einer unserer 5 Äquivalenzklassen.

Sage-Code für obiges Bild. Online Sage-Rechner: www.sagenb.org

```
v=[]


for i in range(21):
    for j in range(21):
        if ((((-10+i)+I*(-10+j))/(1+2*I)).real_part().is_integer() and \
            (((-10+i)+I*(-10+j))/(1+2*I)).real_part().is_integer()):
                v.append(circle((-10+i,-10+j), 0.3, rgbcolor=(0,0,0), fill=True))

        else:
            if ((((-10-1+i)+I*(-10+j))/(1+2*I)).real_part().is_integer() and \
            (((-10-1+i)+I*(-10+j))/(1+2*I)).real_part().is_integer()):
                v.append(circle((-10+i,-10+j), 0.3, rgbcolor=(1,0,0), fill=True))

            else:
                if ((((-10-2+i)+I*(-10+j))/(1+2*I)).real_part().is_integer() and \
                (((-10-2+i)+I*(-10+j))/(1+2*I)).real_part().is_integer()):
                    v.append(circle((-10+i,-10+j), 0.3, rgbcolor=(0,1,0), fill=True))

                else:
                    if ((((-10-3+i)+I*(-10+j))/(1+2*I)).real_part().is_integer() and \
                    (((-10-3+i)+I*(-10+j))/(1+2*I)).real_part().is_integer()):
                        v.append(circle((-10+i,-10+j), 0.3, rgbcolor=(0,0,1), fill=True))

                    else:
                        v.append(circle((-10+i,-10+j), 0.3, rgbcolor=(1,1,0), fill=True))

g=Graphics()

for i in range(21):
    for j in range(21):
        g+=v[21*i+j]


show(g,axes=false)
```