Mathematik I, Logik und Algebra, WS2011/12
M. Hortmann

Klausur

bitte heften Sie dieses Blatt vor Ihre Lösungen

Name:																					
Matrikelnummer:															**Tutor**						
1a	b	**2**a	b	c	d	**3**a	b	c	d	e	f	g	h	**4**a	b	c	**5**a	b	**6**a	b	Σ

Für die korrekte Lösung einer Teilaufgabe gibt es 10 Punkte.
Damit sind maximal 210 Punkte erreichbar.

Aufgabe 1 Mengen und Relationen
a) Gegeben sei die übliche Ordnungsrelation $\leq$ auf der Menge $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Wieso ist diese Relation keine Äquivalenzrelation?
b) Sei M eine Menge, auf der eine Äquivalenzrelation gegeben ist und seien $x, y \in M$.
Zeigen Sie, daß $\bar{x} \neq \bar{y} \Rightarrow \bar{x} \cap \bar{y} = \emptyset$

Aufgabe 2 Natürliche Zahlen
a) Nennen Sie die Peano-Axiome.
b) Wie lautet die rekursive Definition der Addition in den natürlichen Zahlen?
c) Zeigen Sie durch Induktion: $\forall n \in \mathbb{N} : n+1 = 1+n$.
Beim Beweis dürfen Sie das Assoziativgesetz der Addition, aber natürlich nicht das Kommutativgesetz benutzen.
d) Gegeben Sei die Dezimalzahl 1234.
Schreiben Sie diese Zahl im Stellensystem zur Basis 7. Dokumentieren Sie Ihre Rechnung.

Aufgabe 3 Gruppentheorie
a) Geben Sie ein Beispiel für eine nicht-kommutative Gruppe und führen Sie dann den Beweis, daß Ihre Gruppe nicht kommutativ ist.
b) Definieren Sie den Begriff "Normalteiler".
c) Zeigen Sie, daß in einer kommutativen Gruppe jede Untergruppe Normalteiler ist.
d) Definieren Sie die Ordnung eines Elements $a \in G$ (geschrieben ord a oder $\mathrm{ord}_G\, a$).
e) Sei n eine natürliche Zahl. Beweisen Sie, daß aus der Gleichung $a^n = e$ folgt, daß die Ordnung von a ein Teiler von n ist. (e sei das neutrale Element der Gruppe G.)
f) Bestimmen Sie die Ordnung von 2 in $\mathbb{Z}_{257}^*$. (257 ist Primzahl.)
g) Berechnen Sie $2^{100005} \in \mathbb{Z}_{11}^*$. (Geht schnell.)
h) Berechnen Sie mit dem Erweiterten Euklidischen Algorithmus 86^{-1} in $\mathbb{Z}_{275}^*$. (Geht schnell.)

Aufgabe 4 Ringtheorie

Sei R ein Ring mit Eins. Wie üblich sei 0 sei das neutrale Element der Addition und 1 das neutrale Element der Multiplikation. Ist $a \in R$, so ist -*a* das eindeutig bestimme inverse Element von *a* bezüglich der Addition.

a) Zeigen Sie, daß $-a=(-1)a$
b) Zeigen Sie (-1)(-1)=1

Sei R ein kommutativer Ring. Für Elemente $a, b \in R$ definiert man: $a \,/\, b \quad \Leftrightarrow \quad \exists c \in R: \quad ac=b$.
c) Man zeige: Wenn $<b> \subset <a>$, dann $a \,/\, b$.

Aufgabe 5 Polynome

Betrachten Sie die als Strings von Elementen von $\mathbb{Z}_{11}$ gegebenen Polynome *a*=765431, *b*=432.
Damit sind also $a, b \in \mathbb{Z}_{11}[X]$, und grad *a* = 5 und grad *b* = 2.
a) Berechnen Sie das Polynomprodukt $a \cdot b$.
b)Führen Sie die Division mit Rest von *a* durch *b* durch, d.h. berechnen Sie explizit Polynome $q, r \in \mathbb{Z}_{11}[X]$ mit *a*=*qb*+*r* und grad *r* < 2 [1].

Aufgabe 6 Eisensteinsche Zahlen

Der Ring der Eisensteinschen Zahlen E besteht aus der Menge $\{a+b\omega | a, b \in \mathbb{Z}\}$, wobei $\omega := \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, Addition und Multiplikation in diesem Ring sind gegeben durch die Addition und Multiplikation in $\mathbb{C}$.

a) Man zeige, daß ω und $\omega+1$ Einheiten im Ring E sind.

b) Für $z \in \mathbb{C}$ setzt man $N(z)=z\bar{z}$. Sind $a, b \in \mathbb{Z}$, so ist $z=a+b\omega$ eine Eisensteinsche Zahl.
Man berechne $N(a+b\omega)$ so, daß das Ergebnis ein Ausdruck ist, in dem zwar *a* und *b*, vorkommen, ω aber nicht mehr.

---

1 In der Originalfassung stand hier der Tippfehler: grad *q* < 2