Mathematik I, Logik und Algebra, WS2011/12
M. Hortmann

Blatt 9

Dieses Aufgabenblatt behandelt einen Querschnitt des bisherigen Stoffs der Vorlesung.

Sie haben die Wahl, ob Sie dieses Aufgabenblatt wie üblich als Gruppe einreichen, oder aber als benotete Einzelarbeit.

Im letzteren Fall geht diese Note mit einem Gewicht 1/3 in die Gesamtnote für das Modul Mathematik I ein. Sie können die Aufgabenlösungen wie üblich in Ihrer Gruppe diskutieren, die schriftliche Ausarbeitung muß aber ganz eigenständig erfolgen.

Benotung: 6 Punkte bedeuten die Note "gut" (2,0).
Mehr Punkte führen zu einer besseren, weniger zu einer schlechteren Note.

Sonderregelungen für den Fall, daß nur ein Teil der Mitglieder einer Arbeitsgruppe eine individuelle Benotung wünscht, werden in der Vorlesung diskutiert.

Bitte heften Sie dieses Blatt vor Ihre Lösungen.

Ich wünsche eine Benotung dieses Aufgabenzettels **Name**:									**Tutor**
1	2a	b	c	3a	b	4a	b	5	
1	1	1	1	1	1	1	1	1	
									Note:

Wir geben wie üblich als Gruppe ab und verzichten auf eine Benotung										
Namen									**Gruppe**	**Tutor**
1	2a	b	c	3a	b	4a	b	5	**Summe**	**bearbeitet**
1	1	1	1	1	1	1	1	1	6 Punkte=100%	

Aufgabe 1
Finden Sie eine Verknüpfung der Aussagenvariablen A,B,C,D mittels der logischen Konjunktionen $\neg$, $\wedge$, $\vee$, so daß sich folgende Wahrheitstafel ergibt:

A	B	C	D	gesuchte Verknüpfung von A,B,C,D
f	w	f	w	w
w	w	w	f	w
Alle übrigen Zeilen				f

Aufgabe 2
a) Geben Sie ein Beispiel für Abbildungen $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} K$, so daß zwar $g \circ f$ injektiv ist, g aber nicht.

b) Seien Abbildungen $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} M$ gegeben, und es gelte $g \circ f = id_M$.
Zeigen Sie: f ist injektiv und g ist surjektiv.

c) Sei $f: M \to N$ eine Abbildung und $\Phi: \mathcal{P}(N) \to \mathcal{P}(M)$ die Abbildung zwischen den zugehörigen Potenzmengen, die gegeben ist durch die Abbildungsvorschrift $V \mapsto f^{-1}(V)$.
Man zeige: ist f injektiv, so ist Φ surjektiv.

Aufgabe 3
a) Sei $x \in \mathbb{Q}$, $x \geqslant -1$. Beweisen Sie, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $(1+x)^n \geqslant 1+nx$ [1].

b) Zeigen Sie durch Induktion über n, unter Benutzung der Rechengesetze für rationale Zahlen und der rekursiven Definition der Binomialkoeffizienten, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $a, b \in \mathbb{Q}$ gilt:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$$

Aufgabe 4
a) geben Sie in der Permutationsgruppe $\mathfrak{S}_4$ Elemente der Ordnung 1, 2 , 3 und 4 an.

b) betrachten Sie in $\mathfrak{S}_4$ die Permutationen $\sigma = (2\,3\,4\,1)$ und $\tau = (4\,3\,1\,2)$.
Geben Sie alle Elemente der von $S = \{\sigma, \tau\}$ erzeugten Untergruppe an.

Aufgabe 5
Finden Sie einen Erzeuger der zyklischen Gruppe $\mathbb{Z}_{103}^*$.
Dokumentieren Sie Ihr gesamtes Vorgehen.

---

1 Sie dürfen benutzen, daß für alle $x, y, z \in \mathbb{Q}$ gilt: $x \leqslant y \Rightarrow x+z \leqslant y+z$ und $x, y \geqslant 0 \Rightarrow xy \geqslant 0$.