Mathematik I, Logik und Algebra, WS2011/12
M. Hortmann

Blatt 7

bitte heften Sie dieses Blatt vor Ihre Lösungen

Namen							**Gruppe**	**Tutor**
1	2a	b	c	d	3a	b	**Summe**	**bearbeitet**
1	1	1	1	1	1	1	6 Punkte=100%	

Aufgabe 1

Es sei a=2528976880919149, b=973327984803263. Berechnen Sie mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler von a und b. [1]

Aufgabe 2

Es sei M eine Menge, deren Elemente wir als "Zeichen" auffassen.
Eine Zeichenkette (String, Wort) in M ist definitionsgemäß eine Abbildung $s:\mathbb{N}_m \to M$; dabei nennen wir die natürliche Zahl m die "Länge" der Zeichenkette und schreiben m=len(s). Es ist üblich, eine Zeichenkette e der Länge 0 (die leere Zeichenkette) zu den anderen hinzuzunehmen.

Man kann zwei Worte s, t mit len(s)=n>0 und len(t)=m>0 zu einem neuen Wort st der Länge $n+m$ zusammensetzen, indem man setzt: $(st)(i):=\begin{cases} s(i) & \text{falls } 1\leqslant i<n \\ t(i-n) & \text{falls } n\leqslant i\leqslant n+m \end{cases}$. Außerdem setzt man $ee:=e$, $es:=s$, $se:=s$.

Sei im Folgenden $M:=\{a,b\}$. Wir bezeichnen beispielsweise die durch die Funktionsrelation $F:=\{(1,a),(2,b),(3,b),(4,b),(5,a),(6,b),(7,a)\}$ gegebene Abbildung $\mathbb{N}_7 \to M$ einfach durch die Zeichenkette *abbbaba*. Ist s=*abbbaba* und entsprechend t=*bbaababa*, so ergibt sich für die oben definierte Verknüpfung das Ergebnis st=*abbbababbaababa* einfach durch Hintereinanderschreiben (Verkettung) der einzelnen Zeichenketten. Man sieht sofort, daß diese Verkettung assoziativ ist.

Wir vereinbaren nun zusätzlich drei "Ersetzungsregeln" für Worte in M: $aa=e$, $bb=e$, $aba=bab$. Wenn also in einem Wort die Zeichenfolge aa vorkommt, dürfen wir sie weglassen, ebenso können

---

1d.h. konstruieren Sie die Folge (r_i) bis sich r_{i+1}=0 ergibt. Die einzelnen Divisionsschritte dürfen mit Hilfe eines Arithmetik- oder Computeralgebraprogramms wie bc oder Pari durchgeführt werden, jedoch sind sämtliche Reste r_i zu dokumentieren, ebenso ggf. die Computerbefehle. Im vorliegenden Fall sind 23 Divisionsschritte durchzuführen.

wir die Buchstabengruppe *bb* weglassen, und schließlich dürfen wir die Buchstabengruppe *aba* durch die Buchstabengruppe *bab* ersetzen, und umgekehrt.

Man betrachte jetzt die folgende Menge von Worten in *M*, nämlich: $\{e, a, b, ab, ba, aba\} =: S$.

a) Man wende obige Ersetzungsregeln an und finde ein Element $x \in S$ so daß $x = abababbaabaaabbaabababa$.

b) Man zeige, daß unter Benutzung der obigen Ersetzungsregeln die Verkettung von zwei beliebigen Elementen in *S* zu einem Resultat in *S* führt.

c) Offenbar ist *e* neutrales Element bezüglich der Verknüpfung von Elementen von *S*.
Man bestimme - wieder unter Benutzung der Ersetzungsregeln - für jedes Element $x \in S$ ein zugehöriges Inverses, also ein Element $y \in S$ mit $xy = yx = e$

d) Man gebe eine bijektive Abbildung $f: S \to S_3$ [2]an, so daß $\forall x, y \in S: \; f(xy) = f(x) f(y)$.

(Hinweis: auf der linken Seite der Gleichung ist *xy* die Verkettung der Worte *x*, *y* und auf der rechten *f*(*x*) *f*(*y*) die Verknüpfung der Permutationen *f*(*x*) und *f*(*y*). Nachdem man *f* angegeben hat, sind im Prinzip 36 Fälle zu überprüfen, da es ja 36 Verkettungsmöglichkeiten für die 6 Wörter in *S* gibt.)

Aufgabe 3

Ist *G* eine Gruppe, so heißt eine Teilmenge $H \subset G$ Untergruppe von *G*, wenn
1. $e \in H$, 2. $\forall x, y \in H: xy \in H$, 3. $\forall x \in H: x^{-1} \in H$ [3], d.h. wenn die Teilmenge *H* abgeschlossen bezüglich der Gruppenverknüpfung und der Inversenbildung ist.

Für $n \in \mathbb{N}$ ist $\mathbb{Z}_n := \{0, \ldots, n-1\}$ und $\mathbb{Z}_n^* := \{x \in \mathbb{Z}_n \mid x \neq 0 \text{ und } ggT(x, n) = 1\}$.
Man erinnere sich an die Tatsache, daß $\mathbb{Z}_n^*$ mit der durch $x * y := (xy) \% n$ gegebenen Verknüpfung eine Gruppe ist.

Man gebe a) eine vierelementige und b) eine fünfelementige Untergruppe von $\mathbb{Z}_{25}^*$ an und schreibe die Gruppentafel für die beiden Untergruppen hin, also die Liste aller möglichen Produkte von Elementen der jeweiligen Untergruppe.

---

2 $S_3 := \{f: \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\} \mid f \text{ bijektiv}\}$ ist die Permutationsgruppe von 3 Elementen.

3 Bei einer additiv geschriebenen Gruppe G schreibt man die letzte Forderung so: $\forall x \in H: \; -x \in H$