Mathematik I, Logik und Algebra, WS2011/12
M. Hortmann

Blatt 6

bitte heften Sie dieses Blatt vor Ihre Lösungen

Namen										**Gruppe**	**Tutor**
1a	b	c	d	2a	b	3a	b	c	d	**Summe**	**bearbeitet**
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	8 Punkte=100%	

Aufgabe 1

a) Wandeln Sie die Dezimalzahl 943 ins Binärsystem um.
b) Wandeln Sie die Hex-Zahl ABCD ins Binärsystem und ins Dezimalsystem um.

c) Führen Sie die Multiplikation $1100001 \cdot 111101$ im Binärsystem durch.

d) Führen Sie im Binärsystem die Division mit Rest durch mit den Zahlen 1111110001 und 101011. (Benutzen den aus der Schule bekannten Divisionsalgorithmus)

Es sind jeweils alle Rechenschritte hinzuschreiben.

Aufgabe 2

In der Vorlesung wurden die ganzen Zahlen definiert als Äquivalenzklassen der folgenden Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$: $(a,b) \sim (c,d) :\Leftrightarrow a+d=c+b$.

a) Ist $x=\overline{(a,b)}$ und $y=\overline{(c,d)}$, so wurde definiert $x \cdot y := \overline{(ac+bd, ad+bc)}$. Zeigen Sie, daß diese Operation "wohldefiniert" ist, d.h. zeigen Sie, daß sich aus $\overline{(a,b)}=\overline{(u,v)}$ und $\overline{(c,d)}=\overline{(r,s)}$ die Gleichung $\overline{(ac+bd, ad+bc)}=\overline{(ur+vs, us+vr)}$ ergibt .

b) Für Elemente in $\mathbb{Z}$ der Form $\overline{(n,0)}$ schreiben wir kurz nur n. Damit können wir $\mathbb{N}_0$ als Teilmenge von $\mathbb{Z}$ auffassen. Für $\overline{(m,n)} \in \mathbb{Z}$ setzt man $-\overline{(m,n)} := \overline{(n,m)}$.
Zeigen Sie, daß für alle alle $x \in \mathbb{Z}$ gilt: $x+(-x)=0$ und $-(-x)=x$.

Aufgabe 3

In den ganzen Zahlen gelten folgende Rechengesetze:

Die Addition ist assoziativ.
Es gibt ein eindeutig bestimmtes neutrales Element der Addition, nämlich 0, so daß gilt:
$\forall x \in \mathbb{Z}: \; x+0=0+x=x$.
Zu jedem $x \in \mathbb{Z}$ gibt es ein eindeutig bestimmtes additiv inverses Element, nämlich $-x$, so daß gilt: $x+(-x)=(-x)+x=0$.
Die Addition ist kommutativ.

Die Multiplikation ist assoziativ.
Es gibt ein eindeutig bestimmtes neutrales Element der Multiplikation, nämlich 1, so daß gilt:
$\forall x \in \mathbb{Z}: \; x \cdot 1=1 \cdot x=x$
Die Multiplikation ist kommutativ.

Für Addition und Multiplikation gilt das Distributivgesetz: $\forall x, y, z \in \mathbb{Z}: \; x(y+z)=xy+xz$

Es gibt eine totale Ordnung $\leqslant$ auf $\mathbb{Z}$ mit:
$\forall x, y, z \in \mathbb{Z}: \; x \leqslant y \;\rightarrow\; x+z \leqslant y+z$
$\forall x, y \in \mathbb{Z}: \; x, y>0 \;\rightarrow\; x \cdot y>0$ †

Man folgere nur aus diesen Aussagen, daß
a) $\forall x \in \mathbb{Z}: \; (-1) \cdot x=-x$
b) $\forall x, y \in \mathbb{Z}: \; x<0 \;\wedge\; y>0 \;\rightarrow\; x \cdot y<0$
c) $\forall x, y \in \mathbb{Z}: \; x<0 \;\wedge\; y<0 \;\rightarrow\; x \cdot y>0$
d) $1>0$.

† Ist eine Ordnung $\leq$ gegeben, so bedeutet $x>y$, daß $y \leq x$ und $y \neq x$