Mathematik I, Logik und Algebra, WS2011/12
M. Hortmann

Blatt 5

bitte heften Sie dieses Blatt vor Ihre Lösungen

Namen						**Gruppe**	**Tutor**
1a	b	2a	b	3a	b	**Summe**	**bearbeitet**
1	1	1	1	1	1	5 Punkte=100%	

Aufgabe 1
Man zeige durch Induktion:

a) $\forall\, n \in \mathbb{N}: \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

b) Sei $a \in \mathbb{N}$ mit $a>1$. Dann gilt $\sum_{i=1}^{n} a^i = \frac{a^{n+1}-a}{a-1}$ † .

Aufgabe 2
Sei $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Man setzt für $n \in \mathbb{N}_0$: $n+0:=0+n:=n$, $n-n:=0$ sowie $n \cdot 0 := 0 \cdot n := 0$ und erweitert die natürliche Ordnung von $\mathbb{N}$ auf $\mathbb{N}_0$, indem man $\forall\, n \in \mathbb{N}_0 : 0 \leqslant n$ fordert.
Aussagen der Art $\forall\, n \in \mathbb{N}_0 : E(n)$ werden induktiv bewiesen, indem man als Induktionsanfang zeigt, daß $E(0)$ gilt. Auf $\mathbb{N}_0$ gelten dieselben arithmetischen Gesetze wie auf $\mathbb{N}$. Allerdings gibt es jetzt mit 0 ein "neutrales Element der Addition", und man kann die Subtraktion m-n nicht nur für $m>n$, sondern für $m \geqslant n$ ausführen.

a) Man definiere rekursiv für $m \in \mathbb{N}_0$: $\begin{bmatrix} m \\ 0 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} m \\ m \end{bmatrix} := 1$ und für $0<n<m$: $\begin{bmatrix} m+1 \\ n+1 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m \\ n+1 \end{bmatrix}$ und fertige auf der Basis dieser Definition eine Tafel an, welche die Werte $\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$ für alle $0 \leqslant m \leqslant 10$ und $0 \leqslant n \leqslant m$ enthält.

---

† Schöner ist die Formel $\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$.

b) Man setze 0!:=1 und weiter für $0 \leqslant n \leqslant m$: $\binom{m}{n} := \frac{m!}{n!\,(m-n)!}$.

Man rechne nach, daß für $m \in \mathbb{N}_0$ gilt: $\binom{m}{0} = \binom{m}{m} = 1$ und für $0<n<m$: $\binom{m+1}{n+1} = \binom{m}{n} + \binom{m}{n+1}$.

Bemerkung: es folgt durch Induktion daß $\forall\, m \in \mathbb{N}_0 \left(\forall\, n \in \mathbb{N}_0 :\ n \leqslant m \rightarrow \binom{m}{n} = \left[\begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \right] \right)$. Man schreibt anschließend nur noch $\binom{m}{n}$ und nennt diese Zahl den "Binomialkoeffizienten m über n".

Aufgabe 3

Sei R eine Ordnungsrelation auf einer Menge M und $K \subset M$.
a) Man zeige: gibt es ein $a \in K$, so daß $\forall\, x \in K : a\, R\, x$, so ist a eindeutig bestimmt‡.

Man nennt ein solches $a \in K$ "Minimum von K " und schreibt a=min K .
Es gibt durchaus nicht immer ein Minimum, z.B. besitzt das offene Intervall $]0,1[\ \subset \mathbb{R}$ kein Minimum bezüglich der natürlichen Ordnung auf den reellen Zahlen. Oder setzt man auf den natürlichen Zahlen $m\, R\, n :\ \Leftrightarrow\ n \leqslant m$ und $K := \mathbb{N}$, so besitzt K kein Minimum bezüglich dieser "umgekehrten Ordnung".

Eine totale Ordnung auf einer Menge, bei der jede nicht-leere Teilmenge ein Minimum besitzt, nennt man wohlgeordnet.

b) Man zeige: Mit der natürlichen Ordnung ist die Menge der natürlichen Zahlen wohlgeordnet, d.h. jede nicht-leere Teilmenge der natürlichen Zahlen besitzt ein Minimum.

Lösungshinweis: Man nehme an, es gebe eine Teilmenge $\emptyset \neq K \subset \mathbb{N}$, welche kein Minimum besitzt, setze $M := \mathbb{N} \setminus K$ und zeige durch Induktion $\forall\, n \in \mathbb{N} : N_n \subset M$.

‡ d.h. man nimmt an, daß es ein $b \in K$ gibt mit $\forall\, x \in K : b \leqslant x$ und zeigt dann b=a .