Mathematik I, Logik und Algebra, WS2011/12
M. Hortmann

Blatt 4

bitte heften Sie dieses Blatt vor Ihre Lösungen

Namen						**Gruppe**	**Tutor**
1	2a	b	3a	b	c	**Summe**	**bearbeitet**
1	1	1	1	1	1	5 Punkte=100%	

Peano Axiome:

Es gibt eine Menge $\mathbb{N}$ mit einem Element $1 \in \mathbb{N}$ und einer Abbildung $S: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, so daß

1. S ist injektiv aber nicht surjektiv, und $1 \notin S(\mathbb{N})$.
2. Ist $M \subset \mathbb{N}$ und gilt a) $1 \in M$ und b) $n \in M \;\to\; S(n) \in M$, so ist $M = \mathbb{N}$. (Induktionsaxiom)

Rekursive Definition der Addition:
Für $m, n \in \mathbb{N}$ setzt man a) $m+1 := S(m)$, b) $m + S(n) := S(m+n)$.

Dadurch ist für alle $m, n \in \mathbb{N}$ die Summe $m+n$ definiert und somit die Additionsabbildung

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ (m, n) & \mapsto & m+n \end{array}$$

Induktionsbeweise:

Um für eine Aussage $\forall\, n \in \mathbb{N}: E(n)$ einen sogenannten Induktionsbeweis zu führen, geht man so vor: Man bildet die Menge $M := \{n \in \mathbb{N} \mid E(n)\}$ und zeigt a) $1 \in M$, d.h. $E(1)$ und b) $n \in M \to S(n) \in M$ d.h. $E(n) \to E(S(n))$. Aufgrund des Induktionsaxioms ist dann $M = \mathbb{N}$, was offenbar gerade bedeutet, daß $\forall\, n \in \mathbb{N}: E(n)$.

Den Nachweis von $E(1)$ nennt man Induktionsanfang, und den Nachweis von $n \in M \to S(n) \in M$ Induktionsschluß.

Aufgabe 1
Man zeige durch Induktion: $\forall n \in \mathbb{N} : (n \neq 1 \ \rightarrow \ n \in S(\mathbb{N}))$.

Aufgabe 2
Das Assoziativgesetz der Addition lautet: $\forall m, n, k \in \mathbb{N} : (m+n)+k = m+(n+k)$.
Das Kommutativgesetz der Addition lautet $\forall m, n \in \mathbb{N} : m+n = n+m$.

Man beweise durch Induktion unter Benutzung des Assoziativgesetzes und der rekursiven Definition der Addition:
a) $\forall n \in \mathbb{N} : n+1 = 1+n$
b) $\forall n \in \mathbb{N} : (\forall m \in \mathbb{N} : m+n = n+m)$ (Beim Induktionsanfang kommt a) zum Einsatz.)

Aufgabe 3
Für $n, m \in \mathbb{N}$ wird definiert: $n < m :\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} : n+k = m$

Man zeige

a) durch Induktion $\forall n \in \mathbb{N} : \ \neg(n < n)$
b) (ohne Induktion) $\forall n, m, k \in \mathbb{N} : \ (n < k \text{ und } k < m) \Rightarrow n < m$

Bemerkung: Setzt man $n \leqslant m :\Leftrightarrow (n = m \text{ oder } n < m)$, so folgt aus a) und b) sofort, daß durch $\leq$ eine Ordnungsrelation auf $\mathbb{N}$ definiert wird.

c) Man zeige durch Induktion: $\forall n \in \mathbb{N} : \ (\forall m \in \mathbb{N} : \ m < n \text{ oder } m = n \text{ oder } n < m)$
Bemerkung: dies bedeutet, daß die durch $\leq$ gegebene Ordnung auf $\mathbb{N}$ total ist.